

# Le reti di Petri P/T (Posti/Transizioni)

Rappresentazione matriciale  
Uso nella modellistica dei DES  
Esempi

# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

### Premessa

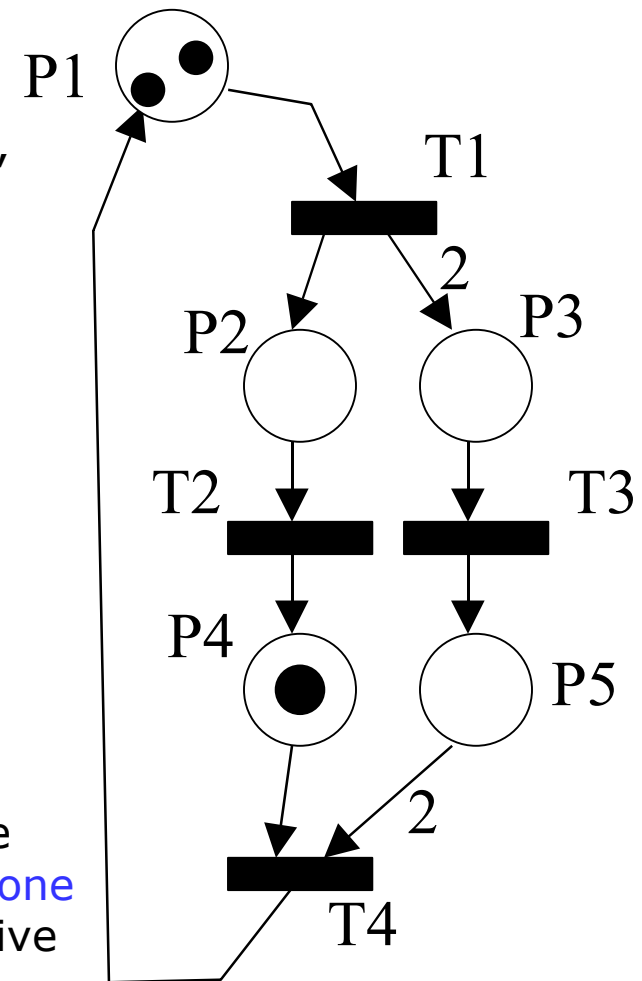
Oltre alla comoda rappresentazione grafica, le reti di Petri sono dotate anche di una relativamente semplice rappresentazione matematica. Tale rappresentazione, detta **matriciale** o **algebrica**, può essere utile per eseguire analisi automatiche della rete, al fine di verificare il soddisfacimento di alcune proprietà di base.

La rappresentazione algebrica delle reti di Petri si basa sui concetti di

- Matrice d'ingresso
- Matrice d'uscita
- Matrice d'incidenza
- Vettore marcatura
- Sequenza di scatti
- Vettore delle occorrenze

Inoltre, con tale rappresentazione si può descrivere l'evoluzione di una rete di Petri in termini di **equazione di stato**, cioè in modo molto simile a come si descrive l'evoluzione di un qualunque sistema dinamico.

### Esempio



# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

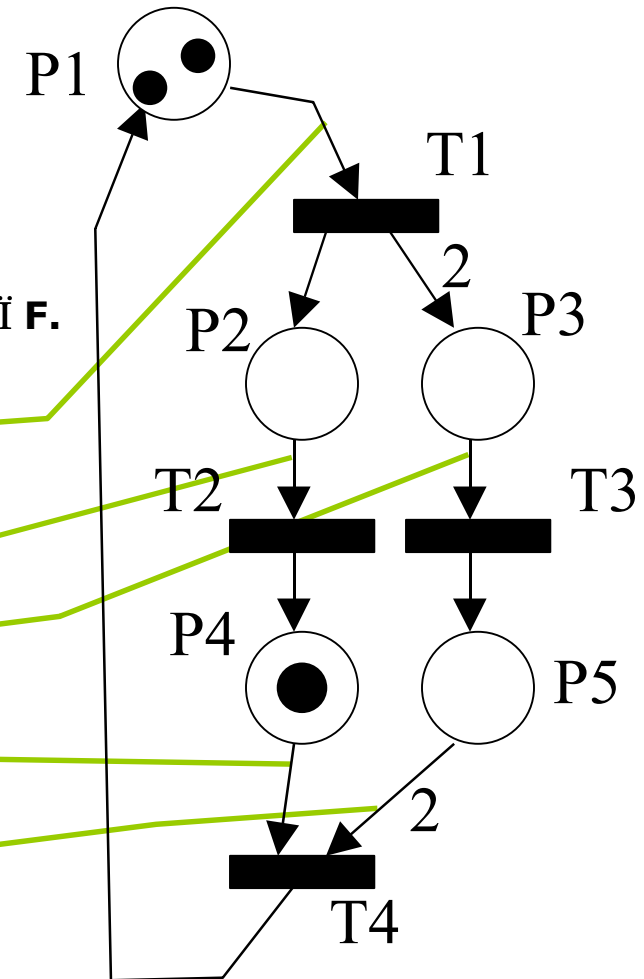
### Matrice d'ingresso

La matrice d'ingresso  $I$  ha  $|P|$  righe (una cioè per ogni posto della rete) e  $|T|$  colonne (una per ogni transizione della rete). Il suo elemento di posizione  $(k,j)$  vale quanto il peso dell'arco che va dal posto  $k$  alla transizione  $j$  se quest'arco c'è, se no vale zero. La matrice  $I$  è dunque definita come

$I_{|P|,|T|}$  con  $I(k,j)=W(p_k,t_j) \text{ " } (p_k,t_j) \in F, I(k,j)=0 \text{ " } (p_k,t_j) \notin F.$

$$I = \begin{array}{c|cccc} & T1 & T2 & T3 & T4 \\ \hline P1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline P3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline P4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline P5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

### Esempio



# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

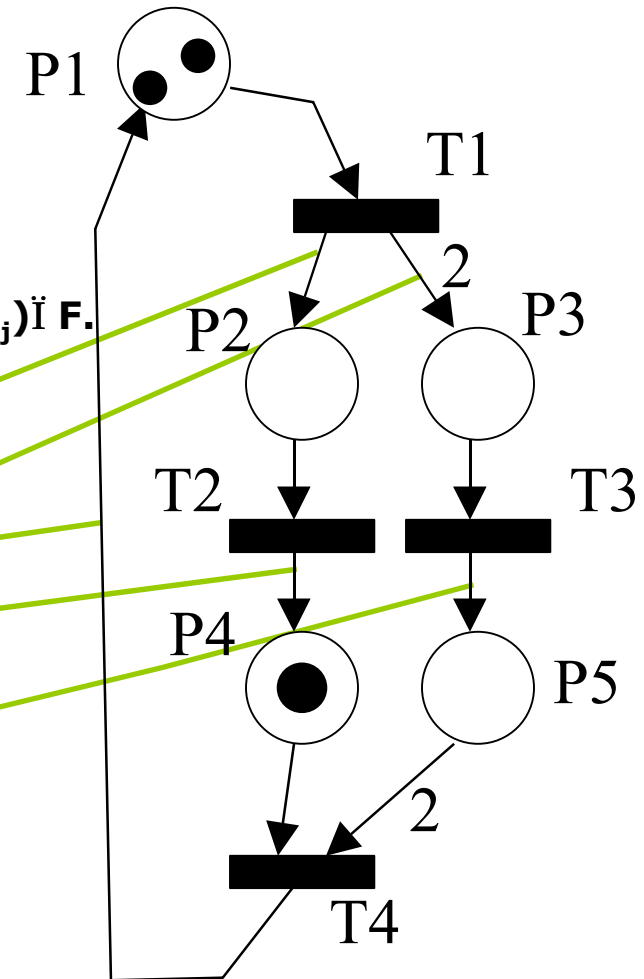
### Matrice d'uscita

La matrice d'uscita  $O$  ha  $|P|$  righe (una cioè per ogni posto della rete) e  $|T|$  colonne (una per ogni transizione della rete). Il suo elemento di posizione  $(k,j)$  vale quanto il peso dell'arco che va dalla transizione  $j$  al posto  $k$  se quest'arco c'è, se no vale zero. La matrice  $O$  è dunque definita come

$O_{|P|,|T|}$  con  $O(k,j) = W(t_k, p_j) \text{ " } (t_k, p_j) \hat{I} F, O(k,j) = 0 \text{ " } (t_k, p_j) \hat{I} F.$

$$O = \begin{array}{c|cccc} & T1 & T2 & T3 & T4 \\ \hline P1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline P2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline P4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline P5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

### Esempio



# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

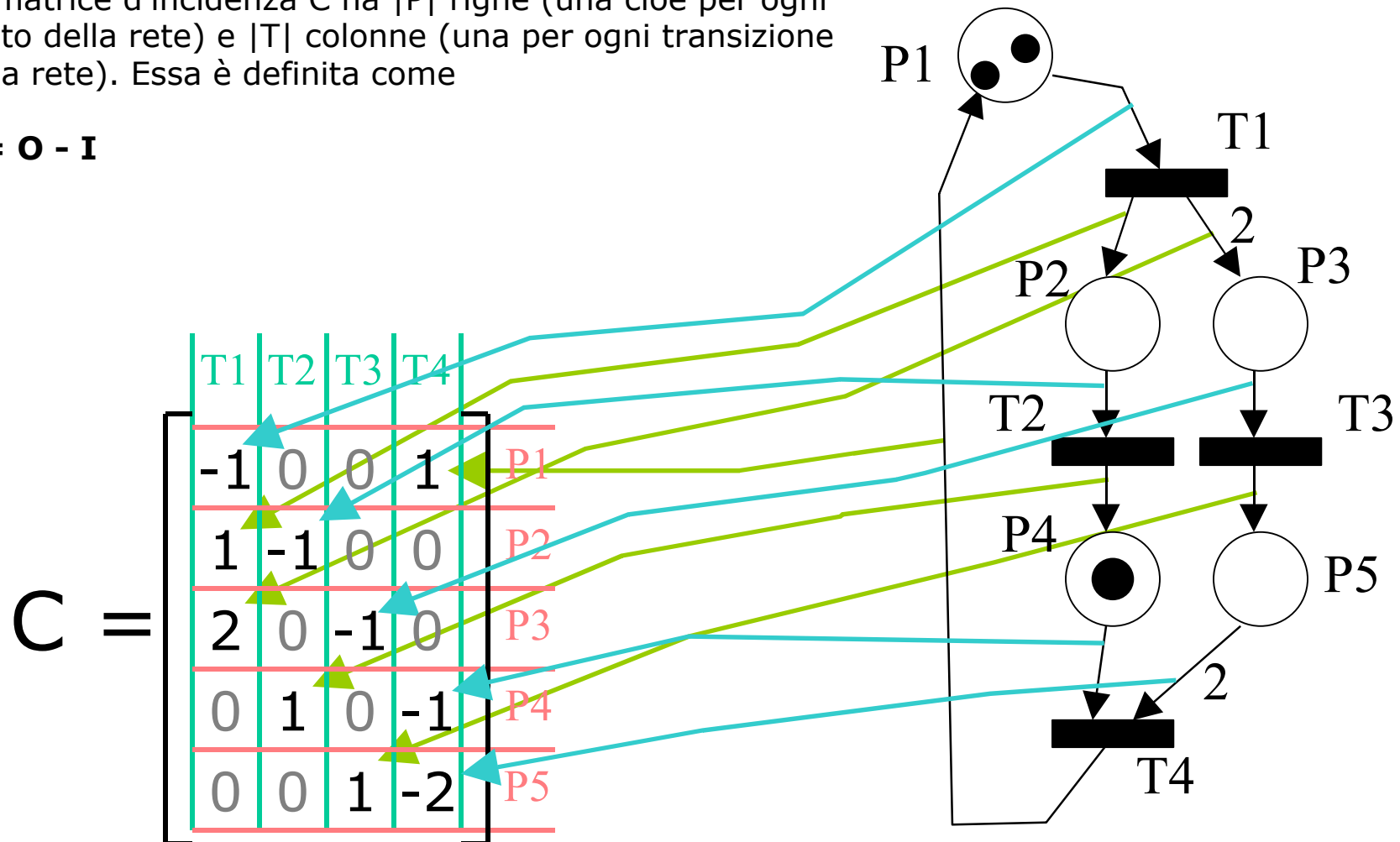
## - rappresentazione matriciale o algebrica -

### Matrice d'incidenza

La matrice d'incidenza  $C$  ha  $|P|$  righe (una cioè per ogni posto della rete) e  $|T|$  colonne (una per ogni transizione della rete). Essa è definita come

$$C = O - I$$

### Esempio



# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

### Matrice d'incidenza

#### Osservazione

La matrice di incidenza non contiene tutte le informazioni che sono contenute nelle singole matrici  $I$  ed  $O$ . Infatti, è immediato notare che se per qualche valore degli indici  $i$  e  $j$  si verificasse che  $O(i,j)=I(i,j)$ , ovvero se il posto  $i$ -esimo fosse collegato con la transizione  $j$ -esima da due archi di direzione opposta e stesso peso, risulterebbe  $C(i,j)=0$ . Quindi, tale situazione si confonderebbe con quella in cui il posto  $i$  e la transizione  $j$  non fossero collegati. Analoghe considerazioni valgono se gli archi che collegano un posto e una transizione hanno direzione opposta e peso diverso.

La struttura costituita da un posto e una transizione collegate da due archi di direzione opposta prende il nome di **autoanello**.

Le reti prive di autoanelli, cioè prive di posti che sono contemporaneamente di ingresso e di uscita ad una stessa transizione, sono dette **reti pure**. Per esse, le matrici di ingresso e uscita hanno elementi non nulli in posizioni mutuamente esclusive. Per esse, pertanto, l'utilizzo della matrice di incidenza è equivalente all'uso delle singole matrici d'ingresso e d'uscita.

# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

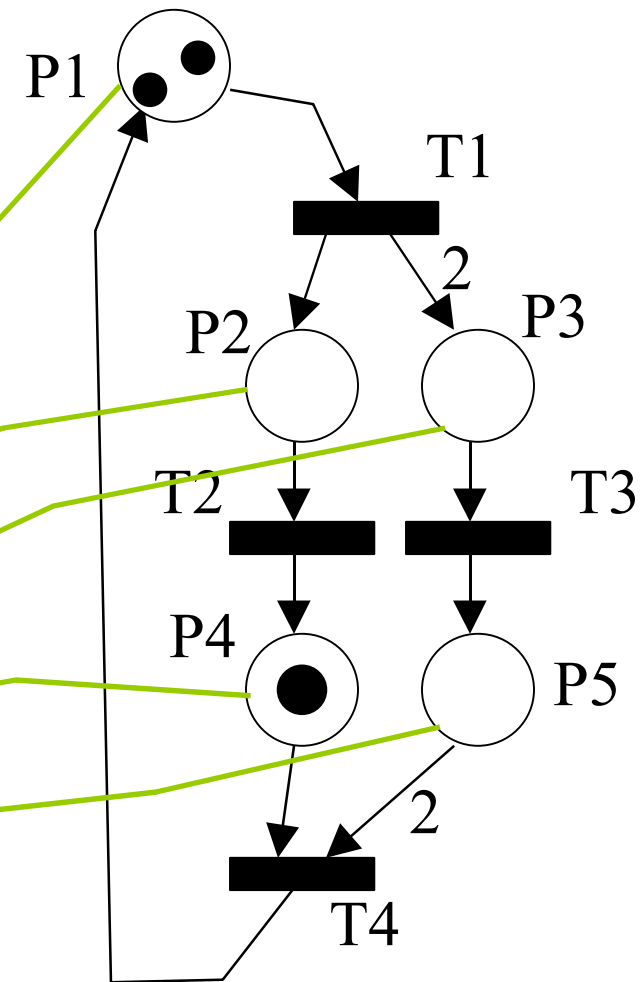
### Vettore marcatura

Data una rete con marcatura  $M$ , si definisce il vettore marcatura  $m$  come il vettore colonna di dimensione  $|P|$  le cui componenti sono valori interi non negativi che rappresentano il numero di marche contenute in ogni posto della rete. Il vettore  $m$  è pertanto definito come

$m = [m_1 \ m_2 \ .. \ m_{|P|}]'$ , con  $m_i = M(p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, |P|$ .

$$m = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \end{matrix}$$

### Esempio



# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

### Vettore marcatura

#### Osservazione

Con la definizione del vettore marcatura e di matrice di incidenza, i concetti di abilitazione e di scatto di una transizione possono essere riformulati in modo molto semplice ed intuitivo. Se infatti evidenziamo le  $|T|$  colonne nelle matrici  $I, O$  e  $C$  scrivendo che  $I=[I_1 \ I_2 \ .. \ I_{|T|}]$ ,  $O=[O_1 \ O_2 \ .. \ O_{|T|}]$ ,  $C=[C_1 \ C_2 \ .. \ C_{|T|}]$ , allora la condizione di abilitazione della transizione  $i$ -esima nella marcatura  $M$  diventa semplicemente

$$M \geq I_i$$

ovvero il fatto che in  $M$  vi siano, nei posti di preset per la transizione  $i$ -esima, almeno tante marche quant'è il peso dell'arco tra ognuno dei primi e la seconda.

Inoltre, lo scatto della transizione  $i$ -esima a partire dalla marcatura  $M$  produce una nuova marcatura  $M^*$  che si calcola facilmente come

$$M^* = M - I_i + O_i = M + C_i$$



# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

### Sequenza di scatti

Una sequenza di scatti abilitata in una marcatura  $M_0$  è una sequenza di transizioni  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , tali che  $t_1$  è abilitata in  $M_0$  e lo scatto di  $t_i$  porta in una marcatura in cui  $t_{i+1}$  è abilitata.

Osserviamo che una qualunque sequenza di transizioni non è in generale una sequenza di scatti. Infatti non è detto che data una sequenza di transizioni si riesca a trovare una sequenza di marcature abilitanti le transizioni di detta sequenza. Per sottolineare il fatto che esista o non esista tale sequenza di marcature ed evitare confusioni, si dirà, quando occorre, che una sequenza di scatti è o non è **ammissibile**.

### Vettore delle occorrenze

Il vettore delle occorrenze  $s$ , associato ad una sequenza di scatti  $S$ , è un vettore colonna di dimensioni  $|T|$ , la cui componente generica  $s_i$  è pari al numero delle occorrenze della transizione  $t_i$  nella sequenza  $S$ .

# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

### Equazione di stato

Dalle definizioni e osservazioni fatte precedentemente è possibile giungere ad una formulazione molto compatta dell'evoluzione di una rete di Petri, in termini del tutto simili a quella di un qualunque sistema dinamico. Ad una rappresentazione siffatta si dà il nome di **equazione di stato**, in quanto serve a calcolare lo "stato successivo" (cioè la marcatura) di una rete nota la marcatura precedente e l'evento (lo scatto di una transizione) avvenuto.

Si supponga infatti che  $M_0$  sia la marcatura corrente di una data rete con matrice di incidenza  $C$ , e si supponga inoltre che sia possibile applicare una certa sequenza di scatti  $S$ , con vettore delle occorrenze  $s$ . Sia  $M_1$  la marcatura raggiunta dopo l'applicazione della sequenza  $S$ . Si può facilmente osservare che

$$M_1 = M_0 + Cs$$

Quest'equazione governa l'evoluzione della rete in quanto dice, noto lo stato iniziale (la marcatura iniziale  $M_0$ ) e noti gli eventi avvenuti dall'inizio ad ora (la sequenza  $S$ , che ovviamente deve essere ammissibile), qual è lo stato attuale (la marcatura  $M_1$ ).

E' un'equazione lineare ed ha una fortissima analogia con la legge di evoluzione dei sistemi dinamici.

# Rete di Petri P/T (Posti/Transizioni)

## - rappresentazione matriciale o algebrica -

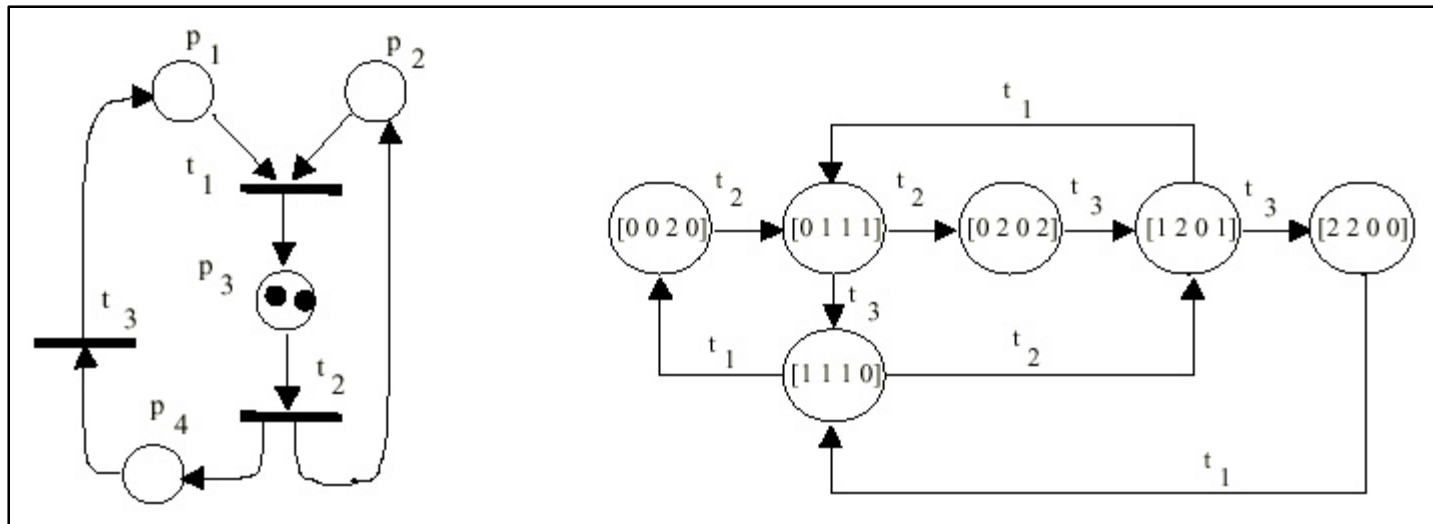
### Insieme di raggiungibilità

Si definisce insieme di raggiungibilità  $R(N, M_0)$  di una rete  $N$  con marcatura iniziale  $M_0$  l'insieme più piccolo di marcature tale da comprendere  $M_0$  e da contenere soltanto marcature dalle quali, con lo scatto di un'opportuna transizione, si va in un'altra marcatura appartenente all'insieme. In altre parole,  $R(N, M_0)$  è l'insieme di tutte le marcature che possono essere raggiunte partendo da  $M_0$  e con una sequenza di scatti ammissibile

### Grafo di raggiungibilità

Si definisce grafo di raggiungibilità di una rete  $N$  con marcatura iniziale  $M_0$  il grafo i cui nodi sono associati agli elementi di  $R(N, M_0)$  ed i cui archi sono associati alle transizioni che portano da una marcatura ad un'altra di  $R(N, M_0)$ .

### Esempio



# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES - introduzione

## **I motivi che rendono interessanti le reti di Petri sono molteplici:**

Sono dotate di una rappresentazione grafica molto spontanea, che ne facilita l'uso anche con strumenti dedicati assistiti da calcolatore.

Rappresentano un'estensione significativa degli automi. Infatti, le reti di Petri (come vedremo) possono rappresentare in modo compatto concetti generali quali sincronizzazione tra processi, il succedersi asincrono di eventi, operazioni concorrenti, conflitti e condivisione di risorse.

Gli automi non riescono a rappresentare sistemi ad infiniti stati con un numero finito di nodi, mentre le reti di Petri consentono di rappresentare sinteticamente tali sistemi anche tramite un grafo con un numero finito di nodi.

In una rete di Petri lo stato di un sistema e la transizione di stato sono concetti distribuiti: ogni stato complessivo della rete è interpretabile come composto da più stati parziali ed indipendenti relativi a sottoreti. Analogamente, una transizione in generale si limita a influenzare solo una parte dello stato complessivo. Al contrario, negli automi a stati finiti lo stato del sistema viene sempre considerato nel suo complesso e per di più le transizioni di stato possibili sono tra loro mutuamente esclusive.

Le reti di Petri si prestano a rappresentare in modo naturale sistemi asincroni (gli eventi non sono vincolati ad accadere secondo una frequenza ben definita): infatti in una rete non è possibile forzare una transizione a scattare qualora in una data configurazione ve ne sia più d'una abilitate a farlo.

# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES - introduzione

## **Caratteristiche fondamentali dei DES:**

Variabili (di stato) "lessicali"  
Evoluzione guidata dagli eventi

## **Caratteristiche di molti sistemi fisici che, a fini di controllo, si ha interesse a descrivere tramite DES:**

Molte variabili di stato, relative a "parti" diverse del sistema  
Possibilità che vi siano infiniti stati

Si è visto che queste caratteristiche tendono a rendere inadatti, come formalismo descrittivo, gli automi (a stati finiti)

Si è introdotta una loro generalizzazione (le reti di Petri)

... è giunto il momento d'introdurre un possibile modo di usare le reti di Petri per descrivere i DES e di rendersi conto dei vantaggi che ne derivano

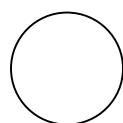
# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

## Un possibile parallelo con la marcatura della rete (ruolo dei posti)

### Marcatura della rete « stato del DES

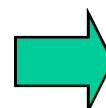
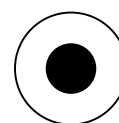
Le variabili di stato dei DES possono

essere booleane  
o riconducibili a  
booleane



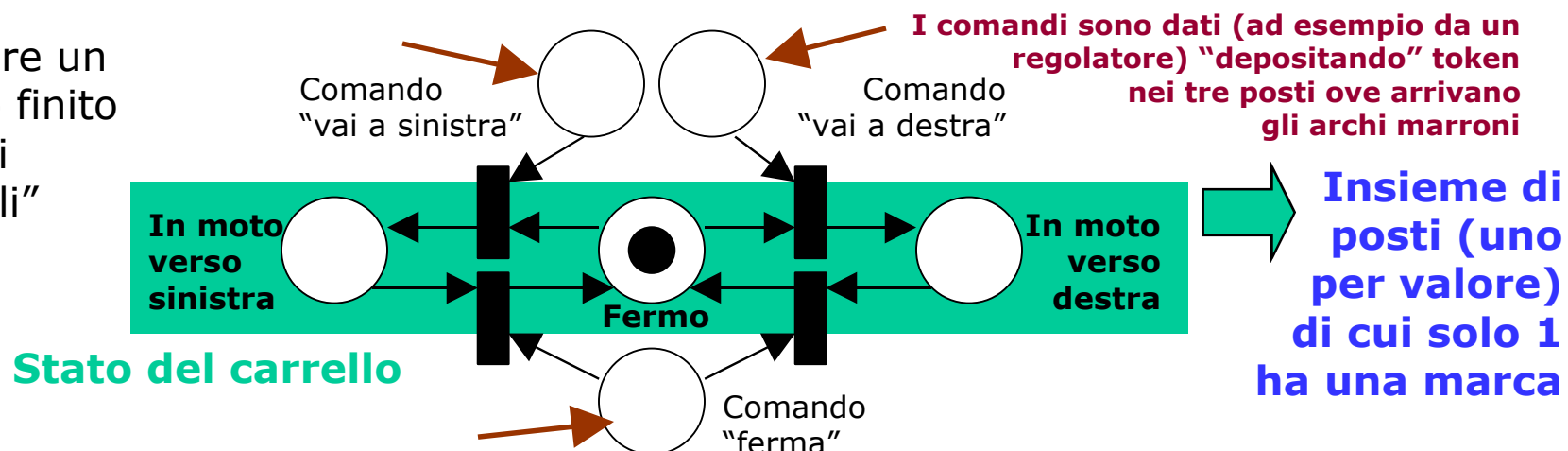
Risorsa occupata  
Pezzo assente  
Interruttore aperto  
...

Risorsa disponibile  
Pezzo presente  
Interruttore chiuso  
...

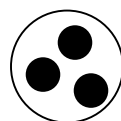


**Posto con  
capacità 1**

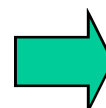
assumere un  
numero finito  
di valori  
"lessicali"



assumere una  
infinità numerabile  
di valori



Numero di pezzi in coda  
Contatore pezzi finiti  
...



**Posto (con  
capacità  
limitata se  
occorre)**

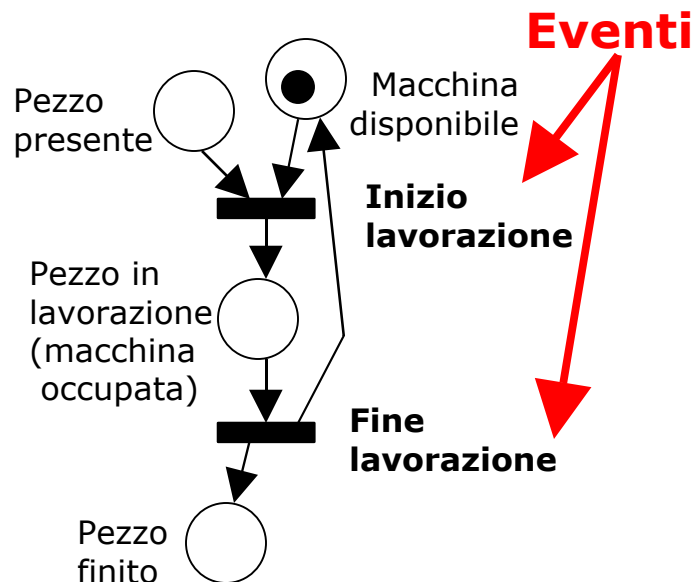
**Con un automa (a stati finiti) questo non si potrebbe descrivere**

# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

## Un possibile parallelo con l'evoluzione della rete (ruolo delle transizioni)

### Scatto di una transizione « evento che accade nel DES

Lo scatto di una transizione modifica la marcatura della rete **localmente**, come del resto un evento (nella grande maggioranza dei casi) modifica localmente lo stato del sistema fisico (e dunque del DES che lo descrive). Questa considerazione porta ad individuare due importantissime caratteristiche delle reti di Petri:



### 1. Leggibilità locale

Guardando una zona della rete è semplice "leggere" lo stato della "zona corrispondente" del sistema descritto.

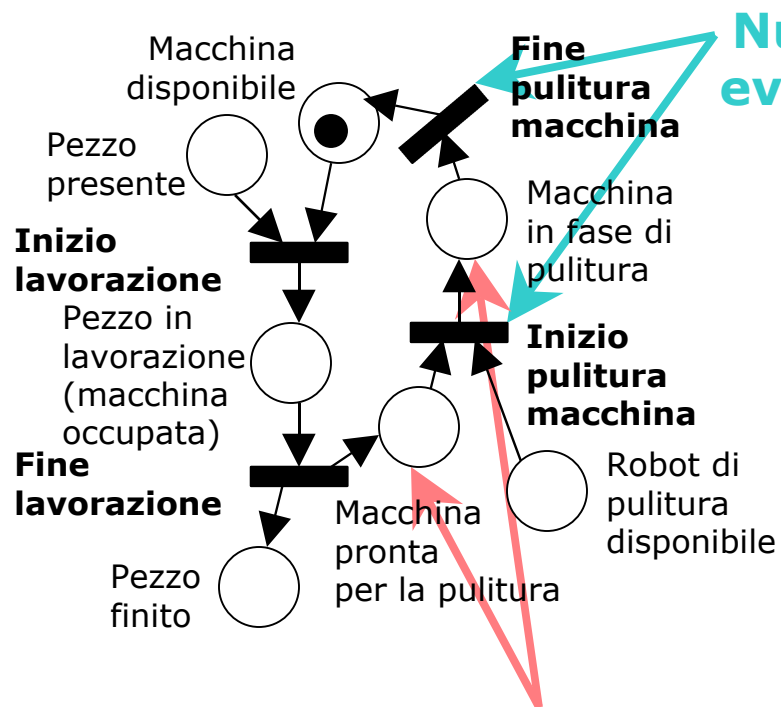
Con gli automi non è così: lo stato è una sola "parola" che ha in sé il valore di tutte le variabili di stato, e la rappresentazione grafica di un automa non mostra affatto le "zone" del sistema fisico ch'esso descrive.

# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

## Un possibile parallelo con l'evoluzione della rete (ruolo delle transizioni)

### Scatto di una transizione « evento che accade nel DES

Lo scatto di una transizione modifica la marcatura della rete **localmente**, come del resto un evento (nella grande maggioranza dei casi) modifica localmente lo stato del sistema fisico (e dunque del DES che lo descrive). Questa considerazione porta ad individuare due importantissime caratteristiche delle reti di Petri:



Nuovi  
eventi

## 2. Scalabilità del livello di dettaglio

Volendo dettagliare maggiormente la descrizione del sistema, con le reti di Petri si debbono fare solo modifiche locali e di solito di complessità paragonabile al maggior dettaglio desiderato.

Con gli automi non è così: aggiungere un nuovo valore per una variabile e/o un nuovo evento aumenta il numero di stati complessivi e complica di molto la descrizione (cioè il modello).

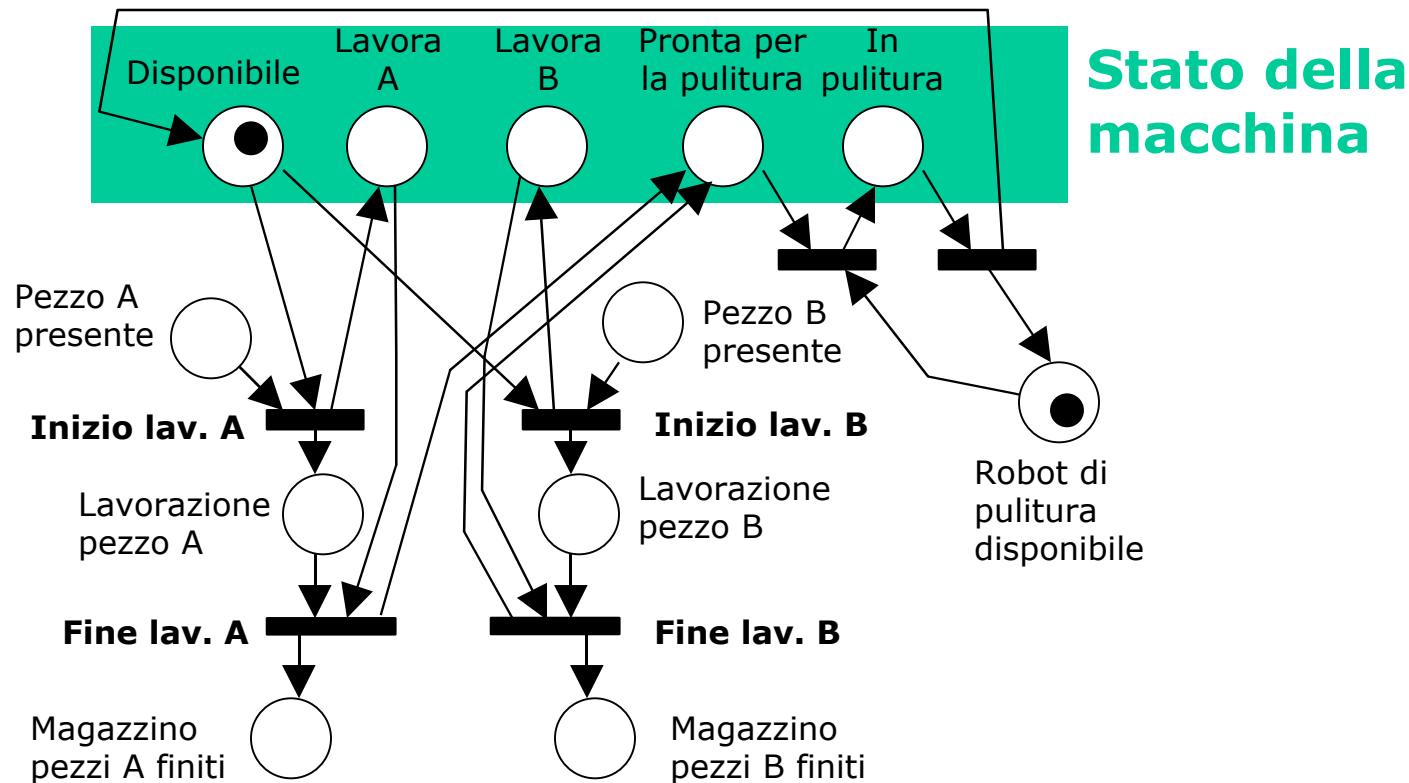
Nuovi valori della variabile "stato macchina"



# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

## Esempio di applicazione dei concetti esposti

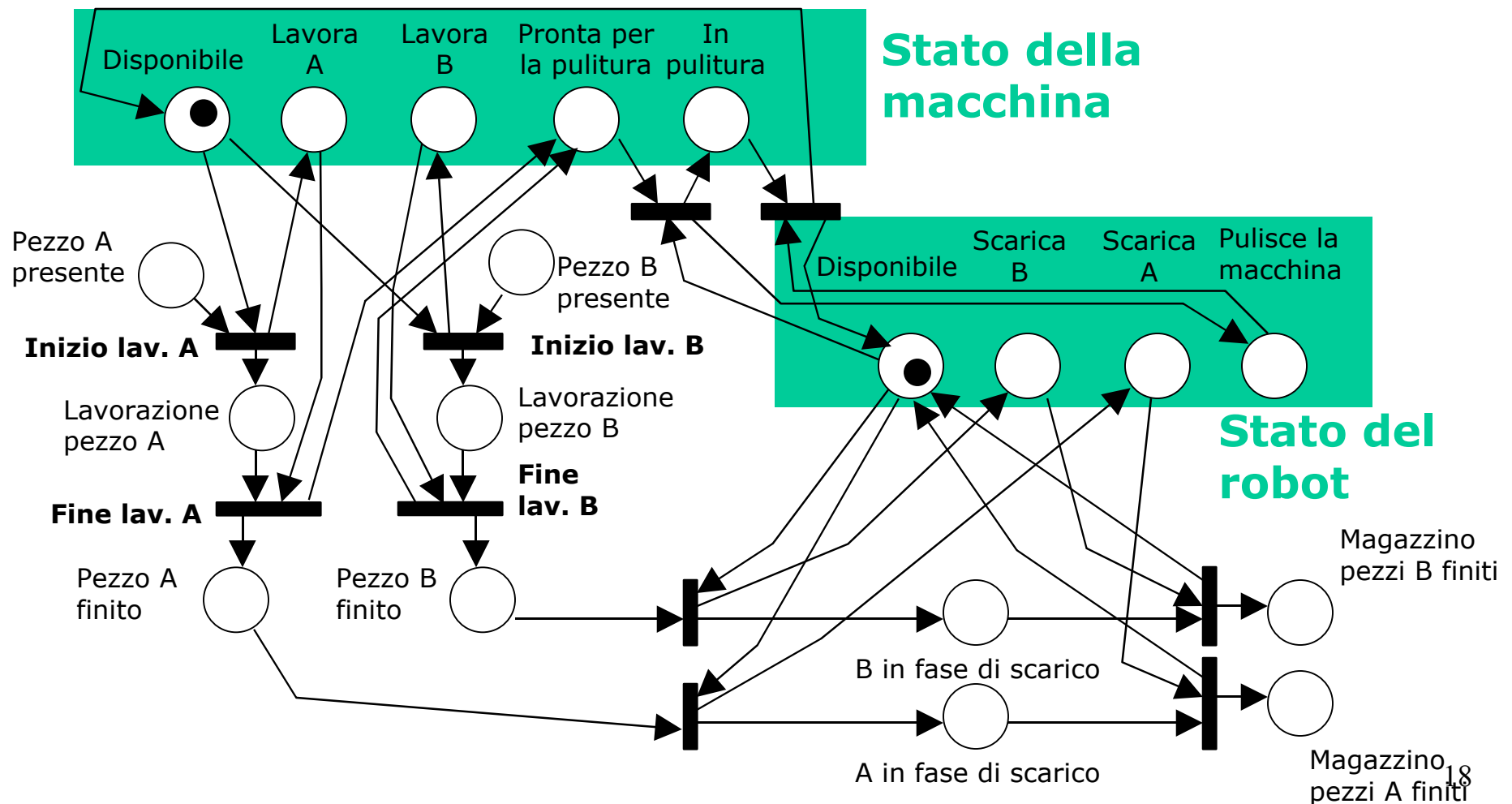
... e se la macchina dovesse lavorare pezzi provenienti da **due** linee A e B?



# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

## Esempio di applicazione dei concetti esposti

... e se il robot di pulitura dovesse **anche** scaricare i pezzi dalle macchine?



# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

## Si possono ora trarre alcune conclusioni:

Si è individuato un modo per usare il formalismo delle reti di Petri particolarmente adatto a descrivere il tipo di DES con cui s'ha a che fare nei problemi d'automazione:

**Marcatura « Stato del DES**

**Posti o insiemi di posti « Variabili di stato**

**Scatto delle transizioni « Eventi**

**Transizioni « Cambi di stato del sistema**

Si è visto (e allenandosi ad usare il formalismo si capirà sempre meglio) che con questa "politica d'uso" delle reti di Petri

**Il modello di un DES si scrive facilmente "pezzo per pezzo",  
anche se il sistema da modellare è di  
grandi dimensioni**

**Il modello che s'ottiene è molto ben leggibile e conserva  
anche visualmente informazioni su quale parte di esso  
fa riferimento a quale parte del sistema**

# Le reti di Petri (P/T) come formalismo per la modellistica e l'analisi dei DES

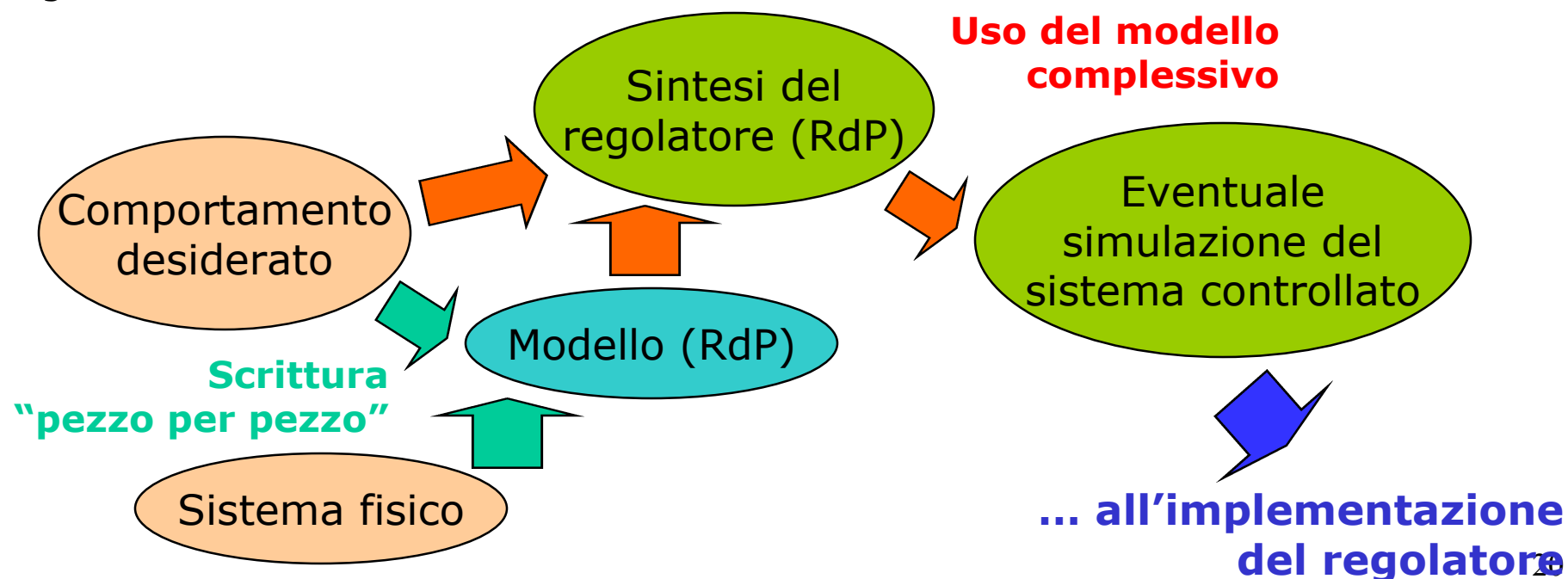
## Soprattutto, però, va notato quanto segue:

Con le reti di Petri, nella loro rappresentazione algebrica, si possono “fare conti”

Con questi conti si possono verificare e/o imporre proprietà della rete **in modo indipendente dalle dimensioni del problema**

## Quindi:

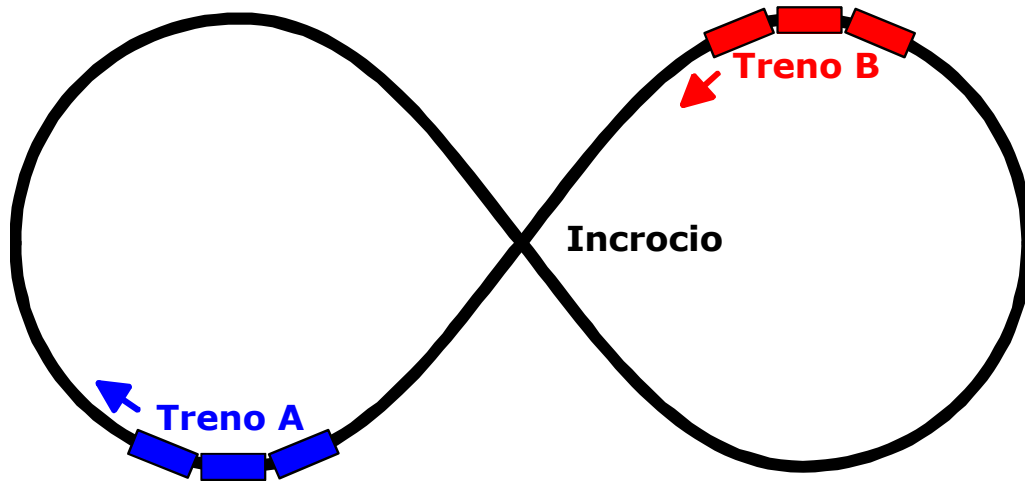
Quando si sarà capaci di tradurre i propri “desideri” sul comportamento del sistema in proprietà della rete (cosa che s'imparerà nel seguito del corso) si potrà affrontare un problema di controllo di DES, indipendentemente dalla sua dimensione, nel modo seguente:



# Esempi

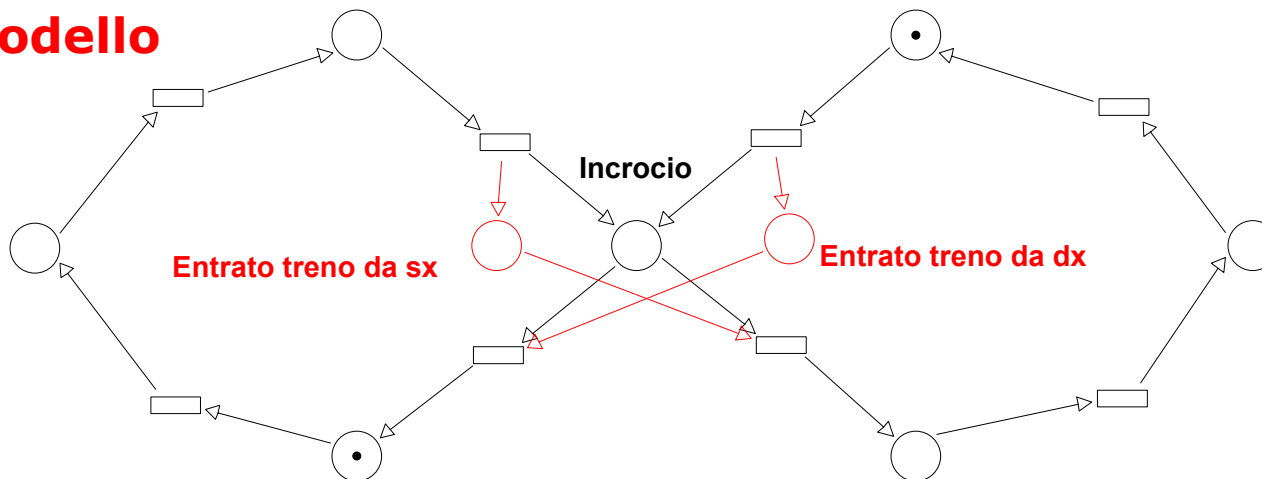
# Esempio 1

## Plastico ferroviario con un incrocio e due treni



Si vuole scrivere un modello del sistema in termini di RdP per la gestione d'un semaforo atto ad evitare collisioni in corrispondenza dell'incrocio. Si assuma che i treni viaggino sempre nel verso indicato dalle frecce.

## Modello



## Comportamento desiderato

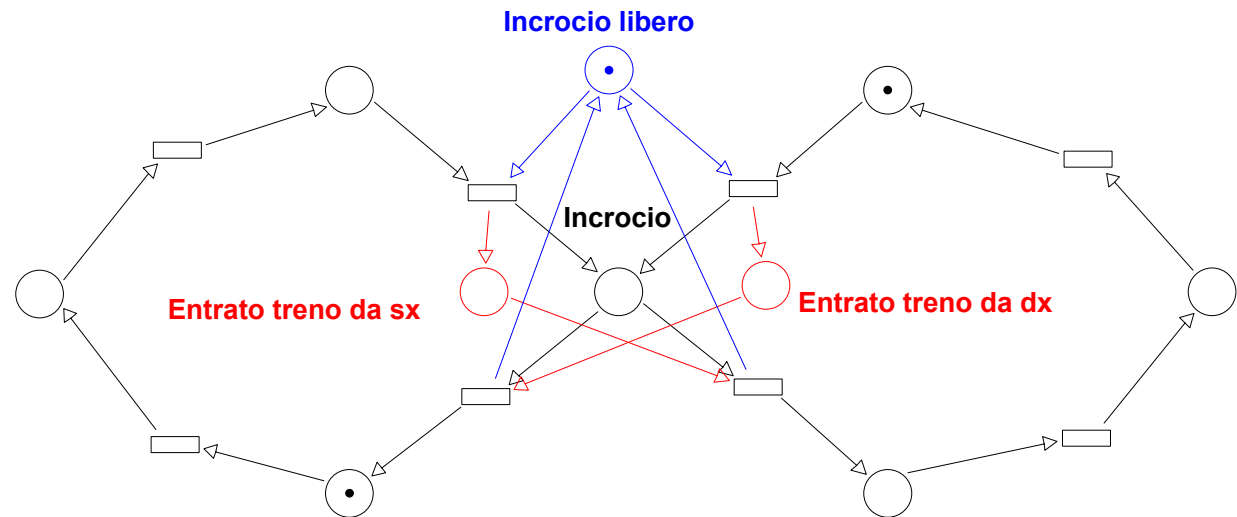
Il posto "Incrocio" non deve mai contenere più di un token.

# Esempio 1

## Plastico ferroviario con un incrocio e due treni

### Modello controllato

Semafori all'ingresso dell'incrocio: verdi se il posto "Incrocio libero" è marcato, rossi se non lo è.



### Concetti appresi

Il comportamento desiderato è stato espresso come **vincolo sulla marcatura** (non più di una marca nel posto che rappresenta l'incrocio). Si è dunque posto e risolto un problema di **stati vietati** (forbidden-state).

L'incrocio è dunque un esempio di **risorsa condivisa**.

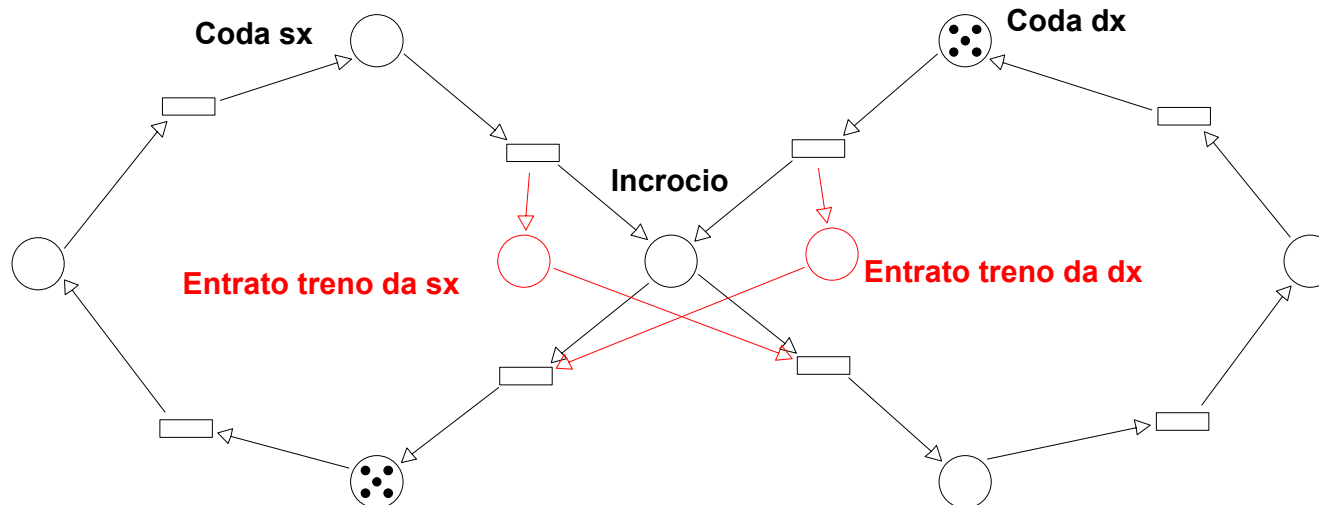
Il controllore opera **permettendo o impedendo lo scatto di certe transizioni** (nel caso presente le due d'ingresso dei treni nell'incrocio) **avendo rilevato la marcatura della rete** (nel caso presente, vedendo scattare una transizione d'ingresso all'incrocio, esso "sa" che questo è occupato da un treno, mentre vedendo scattare una delle due d'uscita "sa" che si è liberato).

## Esempio 2

### Plastico ferroviario con un incrocio e (almeno) due treni

Il problema è lo stesso ma con più di due treni, col che ai semafori si possono formare delle code (in realtà poteva succedere anche prima, se si fosse previsto che i treni potessero fermarsi lungo il percorso talché uno potesse raggiungere l'altro, ma non lo si è considerato per semplicità).

### Modello



### Comportamento desiderato

Il posto "Incrocio" non deve mai contenere più di un token. Inoltre, se vi sono treni in coda da tutt'e due le parti, ne deve entrare uno da sx, poi uno da dx, poi uno da sx e così via.

### Nota

Alla presenza di più token nell'incrocio si dà il significato di collisione, mentre alla presenza di più token nei posti "Coda" si dà appunto il significato di treni in coda: come si vede, **il modello dipende dal problema...**

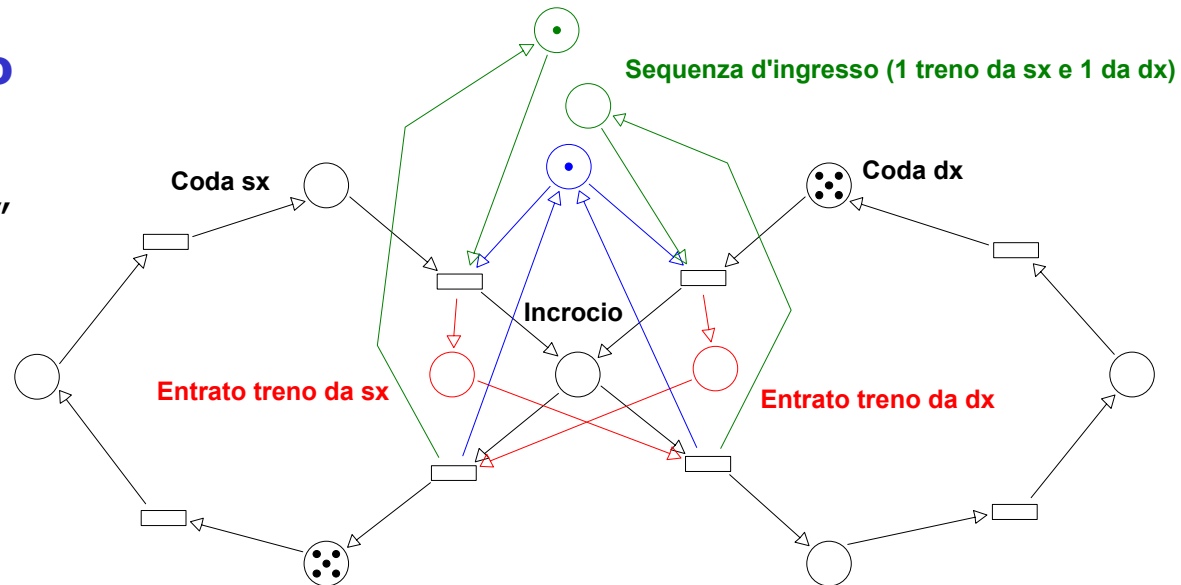


## Esempio 2

### Plastico ferroviario con un incrocio e (almeno) due treni

#### Modello controllato

Semafori all'ingresso dell'incrocio: verdi se il posto "Incroccio libero" è marcato e se vi è il consenso all'ingresso da quel lato, se no rossi.



#### Concetti appresi

Il comportamento desiderato è stato espresso come **vincolo sulla marcatura** (problema forbidden-state) e come **sequenza desiderata di scatti** nel rispetto del vincolo sulla marcatura (problema di **sequenziamento**).

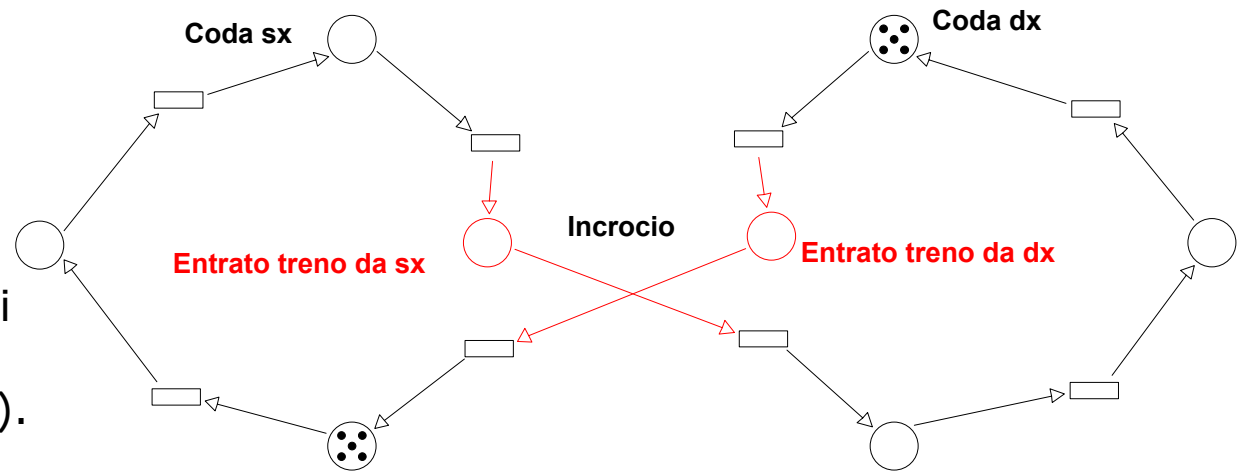
La gestione delle risorse condivise è dunque un problema duplice: evitare le "collisioni" (in senso lato) e gestire le richieste concorrenti. Questo è un problema tipico e si riconduce, come moltissimi altri, alla risoluzione di un problema di stati vietati (che **non dice nulla** sull'ordine con cui saranno soddisfatte le richieste d'uso della risorsa, limitandosi a non farle collidere) seguito da uno di sequenziamento.

## Esempio 3

**Come l'esempio 2, ma con un approccio meno "ingenuo"**

### Modello

Il posto nero "Incrocio", a rigore, è inutile: lo stato della risorsa condivisa può benissimo essere rappresentato con i due soli posti rossi (è libera se nessuno dei due è marcato).



Si osservi che la prima parte del problema (evitare le collisioni) è **ancora un problema forbidden-state**: stavolta, lo stato vietato è quello con ambedue i posti rossi marcati.

### Concetti appresi

Nel modellare una risorsa condivisa, spesso è bene pensare di far corrispondere i posti che la descrivono non tanto agli oggetti fisici che la compongono (il "tratto di binari" prima rappresentato dal posto nero "Incrocio"), ma agli **stati ch'essa può assumere** (disponibile, impegnata e - se del caso - impegnata **da chi**).

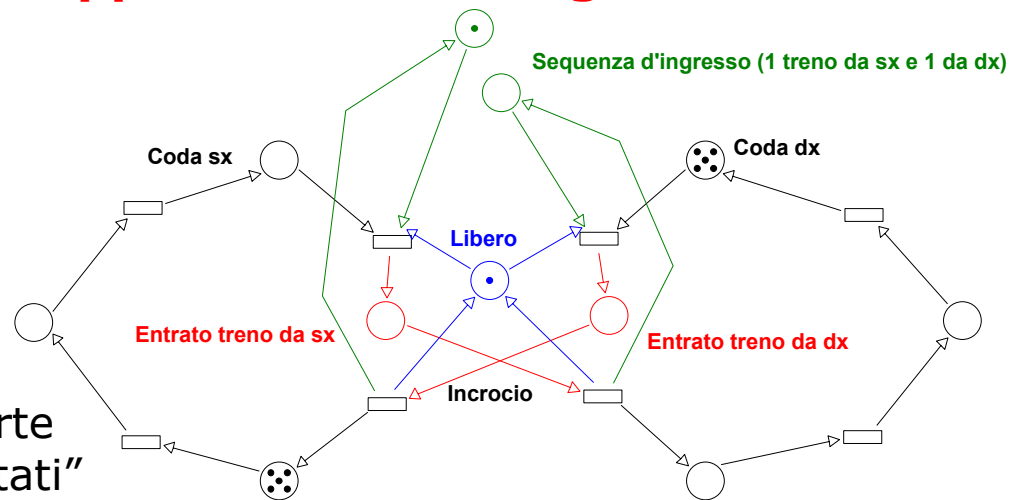
## Esempio 3

**Come l'esempio 2, ma con un approccio meno "ingenuo"**

### Modello controllato

A rigore, ed è facile rendersene conto, anche il posto e gli archi blu sono inutili: i posti e gli archi verdi basterebbero ad imporre il comportamento desiderato.

Tuttavia, lasciare la parte blu ha un senso: quello di **separare** la parte di regolatore che "vieta gli stati vietati" da quella che impone le sequenze desiderate. Così facendo si potrà poi cambiare la logica di sequenziamento se lo si desidera, con la certezza però che gli stati vietati restino tali.



### Concetti appresi

Nel gestire una risorsa condivisa, spesso è bene introdurre posti (che diverranno parte del regolatore) in modo che nella rete complessiva vi sia un posto per **ogni** possibile stato della risorsa, cioè per ognuno degli stati che sono d'interesse ai fini del problema di controllo e che la risorsa deve assumere in modo mutuamente esclusivo (il posto blu è lo stato "libero" dell'incrocio). Questo semplifica di molto il problema della gestione delle collisioni, e spesso di fatto lo risolve.