

# Il controllo dei DES

## Approccio indiretto

1

### Controllo dei DES - approccio indiretto -

Il controllore è il risultato di un processo di sintesi, a partire dai modelli P dell'impianto e Sp delle specifiche Sp:

- è garantita la compatibilità del comportamento in anello chiuso con le specifiche (tipicamente espresse sotto forma di vincoli);
- si possono garantire le proprietà fondamentali del sistema complessivo.

Faremo qui riferimento alla **teoria del controllo supervisivo\***:

- costruzione del modello P dell'impianto;
- costruzione del modello Sp delle specifiche;
- sintesi del controllore C.

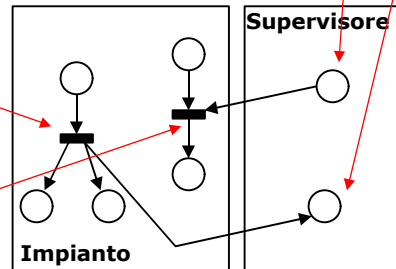
\* J.O Moody, P.J. Antsaklis  
"Supervisory control of discrete event systems using Petri nets"  
Kluwer Academic Publishers.

2

## Controllo dei DES - approccio indiretto -

Nel metodo che vedremo

- la sintesi della rete di Petri (modello) del supervisore si fa dalla rete di Petri che modella l'impianto;
- il supervisore impone vincoli sulla marcatura della rete dell'impianto (**GMECs**, **Generalized Mutual Exclusion Constraints**) sfruttando la nozione di P-invarianti;
- il modello del supervisore è costituito da soli posti, detti **posti di controllo**, opportunamente collegati con le transizioni del modello dell'impianto;
- le transizioni dell'impianto con archi uscenti verso posti di controllo (quando scattano marcano dei posti di controllo) si dicono **transizioni osservate**;
- le transizioni dell'impianto con archi entranti provenienti da posti di controllo (la loro abilitazione dipende dalla marcatura di posti di controllo) si dicono **transizioni controllate**.



3

## Controllo dei DES - approccio indiretto -

- I vincoli (GMEC) che si debbono imporre al funzionamento dell'impianto sono del tipo

$$\mathbf{I} \mathbf{M}_p \leq \mathbf{b}$$

dove  $\mathbf{I}$  è un vettore riga di interi,  $\mathbf{M}_p$  è il vettore marcatura dell'impianto e  $\mathbf{b}$  è uno scalare intero.

### Osservazioni.

- La specifica di comportamento desiderato per il sistema controllato è che una combinazione lineare delle marcature dei posti della rete dell'impianto non superi un valore prefissato in qualunque stato raggiunto.
- Il metodo ricade nella categoria dei problemi con specifica a stati proibiti (*forbidden state control*).
- I vincoli di tipo GMEC non sono i più generali possibili, ma comprendono la maggioranza dei casi utili nella pratica, tra cui i vincoli di mutua esclusione nell'accesso a risorse condivise.

4

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

Sia  $n$  il numero di posti delle rete di Petri che modella il processo,  $m$  il numero delle sue transizioni,  $C_p$  ( $n \times m$ ) la sua matrice di incidenza.

Si vogliono imporre al sistema  $n_c$  vincoli di tipo GMEC, che possono esprimersi con la disuguaglianza matriciale

$$LM_p \leq b$$

dove  $L$  è una matrice  $n_c \times n$  di interi,  $M_p$  è il vettore della marcatura (della rete di Petri) del processo e  $b$  è un vettore colonna ( $n_c \times 1$ ) di interi. Si assume che la marcatura iniziale  $M_{op}$  del processo rispetti il vincolo, ovvero che  $LM_{op} \leq b$ .

### Esempio:

Rete dell'impianto con 3 posti ( $n=3$ );  
2 vincoli ( $n_c=2$ ):

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_3 &\leq 4 \\ m_1 + m_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ L \ (2 \times 3) & & M_p \ (3 \times 1) & & b \ (2 \times 1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

S'introduca un vettore colonna  $M_c$  di  $n_c$  variabili di slack non negative  $m_{c1} \dots m_{cn_c}$  tale che

$$LM_p + M_c = b$$

e si osservi che la precedente uguaglianza si può anche scrivere

$$\begin{bmatrix} L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_p \\ M_c \end{bmatrix} = b,$$

dove  $I$  è la matrice identità di ordine  $n_c$ .

### Esempio:

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_3 &\leq 4 \\ m_1 + m_2 &\leq 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m_1 + 2m_3 + m_{c1} &= 4 \\ m_1 + m_2 + m_{c2} &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ L & & I & & M_p \\ & & & & M_c \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_{c1} \\ m_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

Ogni riga del vincolo  $\mathbf{L}\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_c = \mathbf{b}$  può essere interpretata come un'equazione di vincolo (di eguaglianza, però!) sulla marcatura di una rete di Petri formata

dalla rete del processo ( $\mathbf{n}$  posti,  $\mathbf{m}$  transizioni) e

da  $\mathbf{n}_c$  ulteriori posti, che saranno i **posti di controllo**:

infatti, il vettore marcatura di una rete siffatta è proprio  $[\mathbf{M}_p \ \mathbf{M}_c]'$ .

Chiameremo la rete così ottenuta **rete controllata**: si noti che **le sue transizioni sono tutte e sole quelle del processo**.

La matrice d'incidenza della rete controllata è allora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{C}_c \end{bmatrix}$$

e ha  $\mathbf{n} + \mathbf{n}_c$  righe e  $\mathbf{m}$  colonne: le prime  $\mathbf{n}$  righe sono ovviamente quelle di  $\mathbf{C}_p$ , mentre le ultime  $\mathbf{n}_c$  dicono come gli  $\mathbf{n}_c$  posti di controllo si connettono alle  $\mathbf{m}$  transizioni della rete controllata.

7

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

Ciò che serve sapere è allora

come connettere gli  $\mathbf{n}_c$  posti di controllo alle  $\mathbf{m}$  transizioni della rete controllata e

quale dev'essere la marcatura iniziale  $\mathbf{M}_{0c}$  ( $\mathbf{n}_c \times \mathbf{1}$ ) dei posti di controllo

in modo che la rete controllata rispetti il vincolo  $\mathbf{L}\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_c = \mathbf{b}$ , col che il processo rispetta il vincolo  $\mathbf{L}\mathbf{M}_p \leq \mathbf{b}$ : quindi, **le incognite del problema sono  $\mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{M}_{0c}$** .

Per ottenere  $\mathbf{C}_c$  basta osservare che, essendo  $[\mathbf{M}_p \ \mathbf{M}_c]'$  la marcatura della rete controllata, richiedere il rispetto del vincolo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p \\ \mathbf{M}_c \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

significa semplicemente richiedere che **ognuna delle righe di  $[\mathbf{L} \ \mathbf{I}]$  sia un P-invariante della rete controllata** medesima.

Allora, la matrice  $\mathbf{C}_c$  cercata dovrà rispettare la relazione

$$\mathbf{x}' \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{C}_c \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

quando  $\mathbf{x}'$  è una qualsiasi delle  $\mathbf{n}_c$  righe di  $[\mathbf{L} \ \mathbf{I}]$ .

8

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

Perché la relazione valga per tutte le righe di  $[L \ I]$  occorre e basta che

$$\begin{bmatrix} L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_P \\ C_C \end{bmatrix} u = 0,$$

e quindi  $C_C$  si ottiene con ovvi passaggi:

$$LC_P + IC_C = 0,$$

$$LC_P + C_C = 0,$$

$$C_C = -LC_P.$$

Quanto alla marcatura iniziale  $M_{0C}$  dei posti di controllo basta osservare che, avendo supposto che la marcatura iniziale  $M_{0P}$  del processo rispetti  $LM_{0P} \leq b$ , se si pone

$$M_{0C} = b - LM_{0P}$$

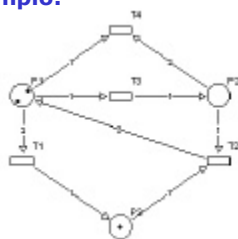
è rispettato in ogni marcatura raggiungibile il vincolo  $LM_{0P} + M_{0C} = b$ , che si sa equivalere a  $LM_{0P} \leq b$ .

**Così facendo, quindi, è stato calcolato il supervisore.**

9

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

**Esempio:**



$$C_P = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_1 + 2m_3 \leq 4$$

$$m_1 + m_2 \leq 3$$

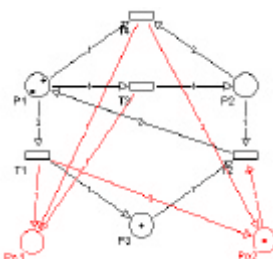
$$M_{0P} = [2 \ 0 \ 1]' \text{ (che rispetta i vincoli)}$$

**Supervisore:**

$$C_C = -LC_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{0C} = b - LM_{0P} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Rete controllata:**



10

## Controllo dei DES - sintesi del supervisore -

### Osservazioni.

- Il metodo consiste nel far sì che le righe della matrice  $[L \ I]$  siano P-invarianti della rete controllata; per questo, esso è anche noto come **metodo dei P-invarianti**.
- Non si può applicare il metodo a vincoli di uguaglianza, cioè del tipo  $LM_p = b$ . Infatti, questa condizione imporrebbe che le righe di  $L$  fossero già da sole dei P-invarianti per la rete originaria. Se è così, non c'è bisogno di posti di controllo aggiuntivi (e infatti risulta  $C_c = -LC_p = 0$ ); se non è così, non è possibile imporlo col solo controllo, ovvero senza modifiche al (la rete di Petri del) processo.
- Il metodo è **massimamente permissivo**, cioè impone solo i vincoli richiesti e non altri (non inibisce altri stati oltre quelli esplicitamente proibiti). Infatti, il supervisore inibisce i soli scatti che porterebbero a  $M_c < 0$ , ovvero a  $LM_p > b$ .
- I P-invarianti del sistema complessivo sono quelli del processo più quelli richiesti dai vincoli e imposti dai posti di controllo.
- Il metodo non porta a rispettare i vincoli un sistema che inizialmente non li rispetta; serve a tenere nei vincoli uno che inizialmente li rispetta.

11

**Il controllo dei DES  
con l'approccio indiretto**  
Transizioni non controllabili  
e/o non osservabili  
Vincoli misti stato/eventi

12

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - transizioni non controllabili e non osservabili -

Nella sintesi del supervisore si è assunto di poter rilevare qualunque evento generato dal processo (cfr. transizioni osservate) e condizionare l'avvenire di qualunque evento in esso (cfr. transizioni controllate).

Quindi, gli archi del supervisore "potevano attaccarsi ovunque".

Nella realtà, non sempre è così. Per descrivere questo fatto, parleremo di transizioni **non controllabili** e **non osservabili**.

Gli esempi sono innumerevoli; ne vediamo solo alcuni per appoggiare le idee.

Transizioni non controllabili:

- guasti e malfunzionamenti, che la rete del processo può descrivere ma ovviamente non si possono controllare (non si può impedire ad una macchina di guastarsi);
- esiti alternativi di un'operazione (ad es. quando si cuoce un dolce non si può decidere a priori se sarà buono, crudo o bruciato);
- processi irreversibili, che una volta partiti non possono essere interrotti (è tipico ad es. delle reazioni chimiche).

Transizioni non osservabili:

- eventi troppo costosi o difficili da rilevare (ad es. perché avvengono in un luogo dove montare i sensori è impossibile);
- malfunzionamenti non esplicitamente previsti dal modello (nel senso che il modello non descrive loro ma soltanto i loro effetti).

13

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - transizioni non controllabili e non osservabili -

Morale: gli archi del supervisore **non possono attaccarsi ovunque**.

Perché un supervisore risulti **realizzabile**, infatti, non deve contenere

- archi uscenti da transizioni non osservabili della rete del processo ed entranti nei posti di controllo, e neppure
- archi uscenti dai posti di controllo ed entranti in transizioni non controllabili della rete del processo.

Nel caso in cui il metodo dei P-invarianti porti ad un supervisore non realizzabile per questi motivi, si può cercare di modificare il vincolo originario in uno compatibile con esso (cioè che ne implichi il rispetto) ma meno permissivo, in modo che il supervisore risulti realizzabile.

### Esempio:

se il metodo dice che in una certa situazione non si può produrre una torta bruciata, il che è evidentemente un evento non controllabile, il solo modo di garantire il rispetto del vincolo è vietare, in quella condizione, di cuocere una torta. Questo è più restrittivo (si vieta di cuocere la torta per vietare di bruciarla) ma realizzabile.

Ora daremo una veste formale al problema, per trattarlo entro il metodo.

14

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - transizioni non controllabili e non osservabili -

### Condizioni di ammissibilità di un vincolo.

In  $C_c$  non ci devono essere elementi che corrispondono  
ad archi da transizioni non osservabili, ovvero  
elementi positivi nelle colonne corrispondenti a transizioni non osservabili,  
né ad archi verso transizioni non controllabili, ovvero  
elementi negativi nelle colonne corrispondenti a transizioni non controllabili.

Poiché  $C_c = -LC_p$  questo si può anche verificare guardando  $L$  e  $C_p$ , il che permette di stabilire subito se un vincolo è o no ammissibile, ovvero se produrrà un supervisore realizzabile o no. Le condizioni di ammissibilità dei vincoli sono allora

- $LC_{nc} \leq 0$ ,

dove  $C_{nc}$  è la sottomatrice ottenuta prendendo le sole colonne di  $C_p$  corrispondenti a transizioni non controllabili;

- $LC_{no} \leq 0$ ,

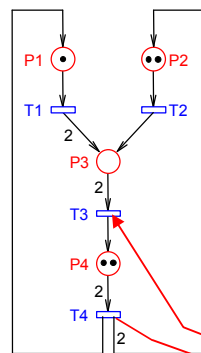
dove  $C_{no}$  è la sottomatrice ottenuta prendendo le sole colonne di  $C_p$  corrispondenti a transizioni non osservabili.

**NOTA:** spesso le transizioni non osservabili vengono assunte per convenzione anche non controllabili. La seconda condizione è allora rimpiazzata da  $LC_{no} = 0$ .

15

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - transizioni non controllabili e non osservabili -

### Esempio



### Significato (molto schematico) di posti e transizioni d'interesse:

- T1** caricamento reagenti nel reattore dalla linea A;
- T2** caricamento reagenti nel reattore dalla linea B;
- P3** reazione chimica in corso nel reattore;
- T3** termine reazione (transizione incontrollabile, perché la reazione quando è partita non si può fermare);
- P4** stoccaggio dei prodotti per raffreddamento.

### Vincoli:

non più di due unità di prodotto per volta possono essere raffreddate; questo significa  $m_4 \leq 2$ , ovvero  $LM_p \leq b$  con  $L = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$  e  $b = 2$ .

### Metodo dei P-invarianti:

essendo  $M_{op} = [1 \ 2 \ 0 \ 2]^T$  è  $LM_{op} \leq b$ , quindi il metodo è applicabile;

applicandolo risulta  $C_c = -LC_p = [0 \ 0 \ -1 \ 2]$  e  $M_{oc} = b - LM_{op} = 0$ , il che corrisponde al supervisore

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto di controllo

evidentemente non realizzabile, perché tenta di controllare T3.

16



## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - vincoli misti stato/eventi -

Finora si sono considerati soltanto vincoli sullo stato. Tuttavia, in generale le specifiche riguardano anche gli eventi.

Ad esempio, si può richiedere che una certa transizione non possa mai scattare se un dato posto è marcato.

Poiché vincoli sullo stato ci sono sempre, c'interessa considerare non il caso di vincoli sui soli eventi ma quello di vincoli "misti" su stato ed eventi.

La forma generale dei vincoli misti include sia il vettore marcatura  $\mathbf{M_p}$  che il vettore delle occorrenze  $\mathbf{s}$ , ed è quindi

$$\mathbf{LM_p} + \mathbf{fs} \leq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{f} \geq \mathbf{0}.$$

### Esempio di vincolo misto.

Rete con 3 posti e 2 transizioni.

Vincolo: quando  $\mathbf{P1}$  e  $\mathbf{P2}$  hanno ambedue una marca,  $\mathbf{T2}$  non deve scattare.

Espressione del vincolo:  $\mathbf{m_1 + m_2 + s_2} \leq 2$ ,  
ovvero  $[\mathbf{1 \ 1 \ 0}][\mathbf{m_1 \ m_2 \ m_3}]' + [\mathbf{0 \ 1}][\mathbf{s_1 \ s_2}]' \leq 2$ ,  
ovvero  $\mathbf{L} = [\mathbf{1 \ 1 \ 0}]$ ,  $\mathbf{f} = [\mathbf{0 \ 1}]$ .

17

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - vincoli misti stato/eventi -

Ai vincoli misti si possono dare due interpretazioni leggermente diverse.

Per spiegare questo fatto si consideri il vincolo elementare  $\mathbf{m_i + s_j} \leq 1$ , al quale si farà riferimento per semplicità in questa trattazione.

Questo vincolo ha due possibili interpretazioni.

### Interpretazione diretta:

la transizione  $\mathbf{Tj}$  non deve scattare se il posto  $\mathbf{Pi}$  è marcato.

### Interpretazione indiretta (che non trattiamo per brevità):

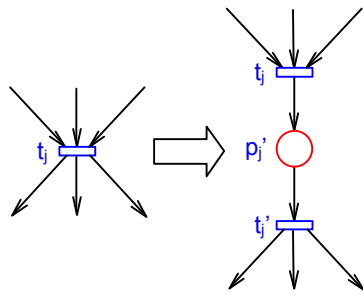
tutti gli stati che abilitano  $\mathbf{Tj}$  devono essere proibiti se il posto  $\mathbf{Pi}$  è marcato.

18

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - vincoli misti stato/eventi -

### Controllo tramite interpretazione diretta.

Per realizzare un vincolo del tipo  $\mathbf{m}_i + \mathbf{s}_j \leq 1$  secondo l'implementazione diretta si opera nel modo seguente:



- si sostituisce la transizione **Tj** con una sequenza transizione-posto-transizione, dove il posto **Pj'** serve a registrare lo scatto di **Tj**;
- si osserva che in tal modo il vincolo  $\mathbf{m}_i + \mathbf{s}_j \leq 1$  risulta trasformato nel vincolo  $\mathbf{m}_i + \mathbf{m}_{j'} \leq 1$ ;
- si sintetizza il supervisore con riferimento a quest'ultimo vincolo, che è sulle sole marcature;
- si elimina il posto **Pj'** e si fondono le transizioni **Tj** e **Tj'**.

**NOTA:** con questo metodo si generano degli autoanelli, e quindi non si possono fare i conti con la matrice di incidenza. Il supervisore sarà cioè descritto non dalla matrice d'incidenza  $\mathbf{C}_c$ , ma dalle matrici d'ingresso e d'uscita  $\mathbf{I}_c$  e  $\mathbf{O}_c$ .

19

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - vincoli misti stato/eventi -

### Controllo tramite interpretazione diretta.

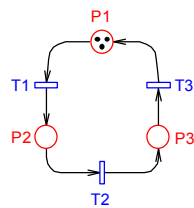
In generale, dato il vincolo  $\mathbf{LM}_p + \mathbf{fs} \leq \mathbf{b}$ , dette  $\mathbf{I}_c$  e  $\mathbf{O}_c$  le matrici di ingresso e d'uscita del supervisore (da determinare) e dette  $\mathbf{I}_{LC}$  e  $\mathbf{O}_{LC}$  le matrici di ingresso e d'uscita corrispondenti alla matrice di incidenza  $-\mathbf{LC}_p$  (posto cioè  $-\mathbf{LC}_p = \mathbf{O}_{LC} - \mathbf{I}_{LC}$ ), si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_c &= \mathbf{I}_{LC} + \mathbf{f} \\ \mathbf{O}_c &= \mathbf{O}_{LC} + \mathbf{f} \\ \mathbf{M}_{0c} &= \mathbf{b} - \mathbf{LM}_{0p}\end{aligned}$$

20

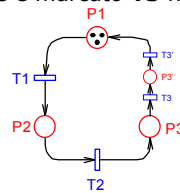
## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - vincoli misti stato/eventi -

### Esempio.

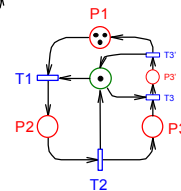


Vincolo (misto):  $m_2 + s_3 \leq 1$ , ovvero **P2** non deve mai avere più di un gettone e se è marcato **T3** non deve scattare.

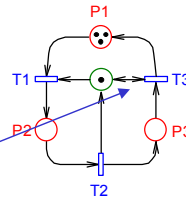
- Si espande la transizione **T3** nel modo seguente:



- Per la rete così ottenuta il vincolo diventa  $m_2 + m_3' \leq 1$ . Applicando il metodo dei P-invarianti si ottiene la rete controllata



- Fondendo **T3** e **T3'** si ottiene infine la rete

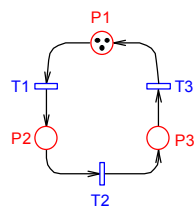


Si noti l'autoanello.

21

## Controllo dei DES con l'approccio indiretto - vincoli misti stato/eventi -

### Esempio.



Lo stesso risultato si ottiene applicando le formule: da

$$C_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L = [0 \ 1 \ 0], f = [0 \ 0 \ 1]$$

si ottiene

$$-LC_p = [-1 \ 1 \ 0] = O_{LC} - I_{LC}$$

e quindi

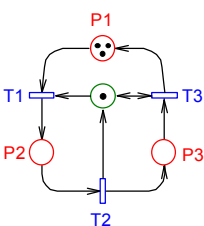
$$O_{LC} = [0 \ 1 \ 0], I_{LC} = [1 \ 0 \ 0].$$

Allora

$$I_c = I_{LC} + f = [1 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ 1] = [1 \ 0 \ 1]$$

$$O_c = O_{LC} + f = [0 \ 1 \ 0] + [0 \ 0 \ 1] = [0 \ 1 \ 1]$$

$$M_{oc} = b - LM_{op} = 1 - [0 \ 1 \ 0][3 \ 0 \ 0]' = 1$$



Si noti l'autoanello.

22

# Esercizi

## sul metodo dei P-invarianti

23