

# Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T)

Proprietà strutturali:  
P-invarianti e T-invarianti

1

Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T)  
- richiami preliminari sull'evoluzione delle RdP -

**Condizione di abilitazione di una transizione ( $M^3 I_i$ )**

$$C = O - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

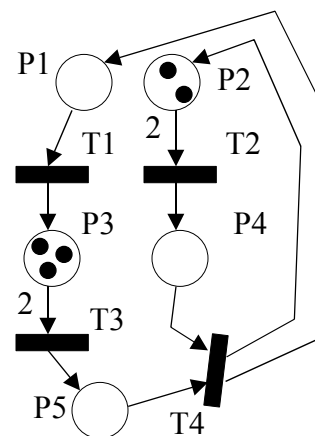
$$\begin{array}{r|l} M & I_1 \\ \hline 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ ? \\ \text{No} \\ T1 \\ \text{non abilitata} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} M & I_3 \\ \hline 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ ? \\ \text{Sì} \\ T3 \\ \text{abilitata} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} M & I_2 \\ \hline 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ ? \\ \text{Sì} \\ T2 \\ \text{abilitata} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} M & I_4 \\ \hline 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ ? \\ \text{No} \\ T4 \\ \text{non abilitata} \end{array}$$

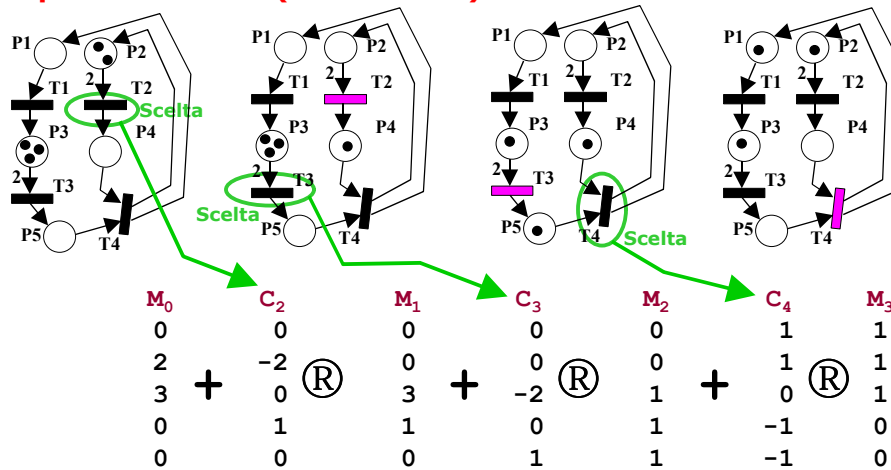
**Esempio (rete pura)**



2

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - richiami preliminari sull'evoluzione delle RdP -

### Sequenza di scatti (ammissibile)



La sequenza è  $S = \{T_2, T_3, T_4\}$  e il vettore delle occorrenze associato è  $s = [0 \ 1 \ 1 \ 1]'$

3

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - richiami preliminari sull'evoluzione delle RdP -

### Sequenza di scatti (ammissibile)

Si può ovviamente calcolare  $M_3$  coll'equazione di stato

#### Nota:

Poiché in  $M_0$  T2 e T3 sono ambedue abilitate e non in conflitto, si sarebbe ottenuto lo stesso risultato finale ( $M_3$ ) anche applicando la sequenza  $\{T_3, T_2, T_4\}$  invece che  $\{T_2, T_3, T_4\}$ . Del resto le due sequenze hanno lo stesso vettore delle occorrenze, ed è dunque corretto che sia tale vettore a ricoprire nell'equazione di stato il ruolo di "ingresso".

$$M_3 = M_0 + Cs = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - complemento sull'evoluzione delle RdP -

### Programma Matlab (1/2)

```
function [Mfin,M,S,s]=PNeval(C,M0,N)
%
% [Mfin,M,S,s]=PNeval(C,M0,N)
%
% Calcola l'evoluzione di una rete di petri P/T
%
% Parametri
% C è la matrice d'incidenza della rete (che si assume pura)
% M0 è il vettore marcatura iniziale
% N è il numero di scatti da far avvenire (se possibile)
%
% Uscite
% Mfin è la marcatura finale (vettore colonna)
% M è una matrice contenente la "storia" della marcatura,
% ovvero le cui colonne sono le marcature attraversate
% dalla rete per giungere da M0 a Mfin (comprese)
% S è un vettore colonna contenente la sequenza di scatti,
% ovvero il cui elemento i-esimo è la i-esima transizione
% scattata
% s è il vettore (colonna) delle occorrenze associato a S
%

[P,T] = size(C); % Numero di posti e di transizioni
O = zeros(P,T); % Calcolo di O prendendo i soli
[rO,cO] = find(C>0); % elementi positivi di C
for i = 1:length(rO) % (si assume rete pura)
    O(rO(i),cO(i)) = C(rO(i),cO(i));
end
I = zeros(P,T); % Calcolo di I prendendo i soli
[rI,cI] = find(C<0); % elementi negativi di C
for i = 1:length(rI) % e cambiandoli di segno
    I(rI(i),cI(i)) = -C(rI(i),cI(i)); % (si assume rete pura)
end
```

5

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - complemento sull'evoluzione delle RdP -

### Programma Matlab (2/2)

```
M = M0(:); % Inizializzazione delle uscite del programma
S = [];
s = zeros(T,1);
Mcur = M;
for i=1:N % Ciclo per gli N scatti richiesti
    Tab = [];
    for j=1:T % S'individuano le transizioni abilitate
        if prod(Mcur>=I(:,j))
            Tab = [Tab;j];
        end
    end
    nTab = length(Tab);
    if nTab>0 % Se vi sono transizioni abilitate
        Tsc = Tab(1+round(rand*(nTab-1))); % si sceglie a caso quella da far scattare,
        Mcur = Mcur+C(:,Tsc); % si calcola la nuova marcatura
        M = [M,Mcur]; % e si aggiornano le uscite del programma
        S = [S;Tsc];
        s(Tsc) = s(Tsc)+1;
    else
        break; % Se non ve ne sono si esce subito dal ciclo
    end
end
Mfin = Mcur;
```

Regola di scelta per lo scatto

6

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - introduzione -

Finora si sa cos'è una rete di Petri, cosa può modellizzare, come rappresentarla (graficamente o algebricamente) e come farla evolvere a partire da un certo stato iniziale.

"Far evolvere" la rete **è già una sua prima analisi**: si può vedere in che marcature va, se finisce in stati indesiderati, se si blocca, e così via. Però, dopo aver fatto evolvere una rete ed aver osservato il risultato, rimane comunque una domanda:

**Quel ch'è successo nell'evoluzione osservata dipende dalla marcatura iniziale, dalla regola di scelta della transizione da far scattare, o è in qualche senso una caratteristica "propria" della rete?**

**In altre parole, se si è visto ad esempio che una transizione non riesce a scattare o se addirittura la rete s'è bloccata, questo è successo "per colpa" della marcatura iniziale? Oppure è dovuto a come il caso ha scelto le transizioni da far scattare?**

**O invece (ed è questo il problema che vogliamo affrontare) il blocco della transizione o della rete è in qualche senso "connaturato" alla rete stessa, nel senso che questi fatti avverrebbero indipendentemente dalla marcatura iniziale e dalla regola di scelta della transizione da far scattare, insomma**

**indipendentemente dalla specifica evoluzione della rete?**

7

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - introduzione -

A questa domanda, è chiaro, non si risponde facendo evolvere la rete molte volte: ad esempio, se anche con moltissime marcature iniziali e moltissime sequenze di scatti la rete non si bloccasse mai, questo non garantisce in nessun modo che non esistano una marcatura iniziale ed una sequenza di scatti capaci di portarla in uno stato di blocco (ovvero senz'alcuna transizione abilitata).

Fermiamoci allora un attimo e facciamo un utile parallelo concettuale. Se invece che con una rete di Petri avessimo a che fare con un sistema dinamico lineare e tempo-invariante a tempo continuo con più ingressi ed un'uscita, come potrebbe suonare una domanda "equivalente" a quella che ci stiamo ponendo? Potrebbe ad esempio suonare così:

**Dopo aver fatto moltissime simulazioni del sistema, con diversi stati iniziali, ho visto che se come andamento degli ingressi s'impiegano dei segnali costanti nel tempo (con valori diversi da simulazione a simulazione) l'uscita ha andamenti tra loro diversi, ma tutti accomunati dal fatto di tendere ad un valore costante (anch'esso diverso da simulazione a simulazione).**

**Posso dire allora che questo avviene sempre, cioè che se applico ingressi costanti prima o poi l'uscita tenderà sempre anch'essa ad una costante?**

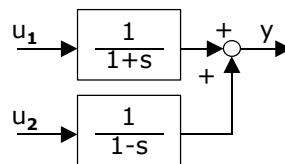
8

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - introduzione -

A chi ci ponesse questa seconda domanda, peraltro, noi sapremmo rispondere.  
Gli diremmo infatti:

**Per dirimere la questione non devi basarti su simulazioni, bensì guardare se il sistema è asintoticamente stabile: se lo è il fatto che hai osservato è sicuramente generale, se no semplicemente non hai fatto le prove giuste per accorgerti che potrebbe anche succedere tutt'altro.**

**Supponi, per fare un esempio deliberatamente banale, che il sistema sia questo:**



**E' chiaro che se in tutte le prove metti  $u_2=0$  e poni a zero anche lo stato iniziale del blocco in basso,  $y$  tenderà sempre ad una costante. Prova però a non fare una di queste due cose e  $y$  divergerà.**

**Se invece studi la stabilità asintotica del sistema, concludi subito ch'essa non c'è e dunque che il fatto osservato nelle simulazioni, date le caratteristiche del sistema stesso, non può essere generale.**

9

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - introduzione -

E adesso, generalizziamo il concetto:

**Su di un sistema dinamico (DES compresi) ha senso porsi due tipi di domande:**

**Il primo riguarda cosa succede con un certo stato iniziale e un certo andamento degl'ingressi, e per quanto riguarda i DES - essendo capaci di far evolvere una rete di Petri - a questo sappiamo già (in parte) rispondere.**

**Il secondo, invece, riguarda cose che prima abbiamo chiamato "caratteristiche generali dell'evoluzione del sistema". Ora, però, possiamo capire che questo modo di dire è in fondo scorretto e trovarne uno migliore.**

**A rigore, anzitutto, non si tratta di "caratteristiche generali dell'evoluzione del sistema" ma, visto che ingressi e stato iniziale in questo discorso non devono entrarci, di "caratteristiche del sistema" e basta.**

**Meglio ancora (e ci aiuta l'esempio sulla stabilità dei sistemi a tempo continuo), si tratta di caratteristiche che hanno a che fare con il modo in cui il sistema è fatto, cioè con la sua struttura (nel caso dei sistemi a tempo continuo la stabilità dipende infatti soltanto dalla posizione dei poli):**

**le chiameremo allora caratteristiche strutturali.**

10

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - introduzione -

**La struttura di una rete di Petri è definita dalla sua matrice d'incidenza, che dice proprio com'essa è fatta in termini di posti, transizioni ed archi che li connettono.**

Esiste dunque un metodo di analisi delle RdP che consiste nello **sfruttare le informazioni contenute nella matrice di incidenza**, ed è appunto per questo detto **matriciale**.

Con tale metodo è possibile determinare le caratteristiche **statiche** o **strutturali** della rete, cioè quelle che dipendono dalla **topologia del grafo** della rete stessa e **non** dalla marcatura.

E' chiaro che le caratteristiche della rete che s'individuano con l'analisi matriciale sono molto utili per capire com'essa si comporterà dinamicamente, ma è necessario tenere ben separati (e dovrebbero in questo aiutare i ragionamenti appena fatti) i concetti legati alle caratteristiche strutturali da quelli legati alle proprietà connesse all'evoluzione dinamica.

**In questa lezione e nella prossima individueremo e studieremo due "strutture algebriche" fondamentali, legate quindi alle caratteristiche statiche di una rete: i P-invarianti ed i T-invarianti.**

11

# Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T)

## P-invarianti

12

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - P-invarianti -

### Definizione

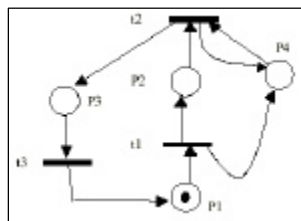
I P-invarianti (invarianti di tipo "posto") corrispondono a insiemi di posti tali per cui la somma pesata dei gettoni che contengono rimane costante per tutte le marcature raggiungibili dalla rete. Un P-invariante è definito come un vettore colonna delle stesse dimensioni del vettore marcatura (cioè  $|P|$ ), i cui coefficienti contengono i "pesi" opportuni per la somma pesata di cui sopra.

### Quindi

Si definisce **P-invariante** di una rete  $N$  un **vettore colonna**  $x$  di dimensione  $|P|$  tale che

$$x' M \in R(N, M_0) \quad x' M = x' M_0$$

### Esempio



In ogni marcatura raggiungibile dalla rete è chiaramente  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ , ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = 1$$

Allora  $x = [1 \ 1 \ 1 \ 0]'$  è un P-invariante di questa rete<sub>13</sub>

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - P-invarianti -

### Ricerca dei P-invarianti

Per trovare i P-invarianti di una rete, bisogna chiedersi quale condizione deve soddisfare un vettore  $x$  di dimensione  $|P|$  per essere un P-invariante.

A tale scopo, si consideri l'equazione di stato

$$M = M_0 + Cs.$$

Moltiplicando a sinistra per  $x'$  ambo i membri si ottiene

$$x' M = x' M_0 + x' C s$$

e questa relazione deve valere per qualunque vettore delle occorrenze  $s$  ammissibile e non tutto nullo.

Se  $x$  è un P-invariante allora, si deduce che  $x$  soddisfa l'equazione

$$x' C s = 0, \quad s \neq 0.$$

Pertanto, i P-invarianti della rete si trovano cercando le soluzioni **interi** dell'equazione

$$x' C = 0.$$

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - P-invarianti -

### Ricerca dei P-invarianti

L'equazione  $x'C=0$  ha ovviamente **infinite** soluzioni. Trovato infatti un P-invariante  $x$ , ogni vettore  $kx$ , con  $k$  intero, è un P-invariante della rete. Inoltre, dati due P-invarianti,  $x_1$  e  $x_2$ , anche il vettore somma  $x=x_1+x_2$  è un P-invariante della rete.

La combinazione lineare di P-invarianti, dunque, è ancora un P-invariante, e si possono fare due considerazioni:

Non ha senso cercare "tutti" i P-invarianti di una rete, perché o non ve ne sono o ve ne sono infiniti.

Tra tutti i P-invarianti di una rete ce ne dev'essere un sottoinsieme capace di generare, per combinazione lineare dei suoi elementi, tutti gli altri.

Per trovare quell'insieme minimo di P-invarianti che è in grado di generarli tutti, sono utili alcune definizioni.

15

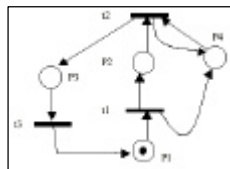
## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - P-invarianti -

### Definizioni

#### Supporto di un P-invariante

Il **supporto** di un P-invariante  $x$  è l'insieme, denotato con  $||x||$ , dei posti corrispondenti ad elementi non nulli di  $x$ .

#### Esempio



Il supporto del P-invariante  $x = [1 \ 1 \ 1 \ 0]'$  è l'insieme di posti **{P1,P2,P3}**

#### P-invariante a supporto minimo

Un P-invariante è detto **a supporto minimo** se il suo supporto non contiene quello di nessun altro P-invariante della rete. Un P-invariante a supporto minimo, allora, **non** è combinazione lineare di altri P-invarianti.

#### P-invariante canonico

Un P-invariante è detto **canonico** se il massimo comun divisore dei suoi elementi non nulli è pari a 1. Un P-invariante canonico, allora, **non** si ottiene da un altro moltiplicandolo per un numero intero.

16



## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - P-invarianti -

### Definizioni

#### Generatore di P-invarianti positivi

Un insieme generatore di P-invarianti positivi è il più piccolo insieme di P-invarianti positivi tali che **ogni** altro P-invariante della rete è ottenibile tramite combinazione lineare dei suoi elementi. Gli elementi dell'insieme generatore sono detti **P-invarianti minimi** (perché appunto tutti gli altri P-invarianti della rete si ottengono da loro combinazioni lineari).

#### Valgono le seguenti due proposizioni:

Un P-invariante è **minimo** se e solo se è canonico e a supporto minimo. L'insieme generatore di P-invarianti è finito ed unico.

#### Quindi, riassumendo:

Se una rete ha dei P-invarianti, questi si possono **tutti** ottenere come combinazione lineare di alcuni di essi, detti **minimi**. I P-invarianti minimi, dato che appunto generano tutti gli altri per combinazione lineare, sono quelli che non sono combinazione lineare di altri (devono cioè essere **a supporto minimo**) e che non si possono ottenere prendendone un altro e moltiplicandolo per un intero (devono cioè essere **canonici**).

17

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - P-invarianti -

### Significato dei P-invarianti

Il significato di un P-invariante (positivo) è quello d'identificare un gruppo di posti in cui si conserva non necessariamente il numero totale di gettoni contenuti, ma una somma pesata del numero di gettoni contenuti in ognuno dei posti.

In questo modo, si sa che il numero complessivo di gettoni contenuti nel gruppo di posti varia da un minimo ad un massimo facilmente calcolabili. Per questo motivo, i P-invarianti positivi sono anche detti **componenti conservative** di una rete.

#### Rete coperta da P-invarianti

Una rete si dice **coperta da P-invarianti** se ogni posto della rete appartiene al supporto di almeno un P-invariante.

#### Rete conservativa

Una rete si dice **conservativa** se è coperta da P-invarianti non negativi.

#### P-invarianti e limitatezza

Una rete conservativa è **limitata**. Infatti in una rete coperta da P-invarianti non negativi non accade mai che il numero di gettoni possa crescere indefinitamente. Quindi, tale rete è limitata. Non vale tuttavia il viceversa. In generale, infatti, non è detto che una rete limitata sia conservativa.

18

# Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T)

## T-invarianti

19

### Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - T-invarianti -

#### **Definizione**

In modo duale ai P-invarianti, i T-invarianti (invarianti di tipo "transizione") si riferiscono alle transizioni. Sono rappresentati da vettori delle stesse dimensioni di un vettore delle occorrenze (ovvero  $|T|$ ), i cui elementi contengono il numero di volte in cui una transizione deve scattare per riprodurre una data marcatura.

#### **Quindi**

I T-invarianti rappresentano **possibili** sequenze di scatti che riportano la rete nella marcatura iniziale.

20

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - T-invarianti -

### Ricerca dei T-invarianti

Per trovare i T-invarianti di una rete, bisogna chiedersi quale condizione deve soddisfare un vettore  $y$  di dimensione  $|T|$  per essere un T-invariante.

Se una sequenza di scatti associata a  $y$  deve riportare la rete nella marcatura iniziale, dall'equazione di stato si deduce che dev'essere

$$M_0 + Cy = M_0.$$

Pertanto, i T-invarianti della rete si trovano cercando le soluzioni **interi** dell'equazione

$$Cy = 0.$$

21

## Analisi matriciale delle reti di Petri (P/T) - T-invarianti -

### Osservazioni

La presenza di un T-invariante non implica che è davvero possibile ritornare alla marcatura iniziale, qualunque essa sia. Infatti la marcatura iniziale potrebbe non soddisfare la condizione di abilitazione per nessuna transizione, ovvero potrebbe non esistere nessuna sequenza di scatti ammissibile tale che il relativo vettore delle occorrenze sia proprio il T-invariante.

Più propriamente, quindi, un T-invariante  $y$  indica che, **se fosse possibile** far scattare ogni transizione del supporto di  $y$  in un ordine qualunque, allora lo stato della rete **potrebbe** tornare al valore iniziale al termine della sequenza.

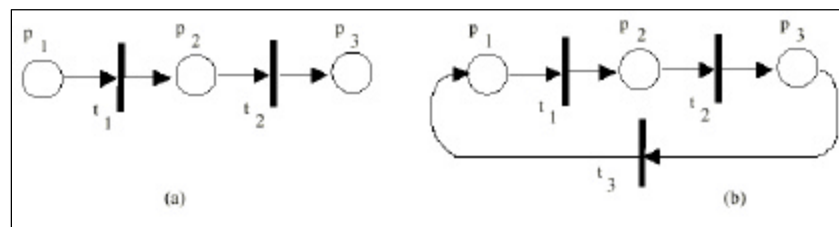
Confrontando le due equazioni usate per la ricerca dei P-invarianti ( $x'C=0$ ) e dei T-invarianti ( $Cy=0$ ) si deduce che i T-invarianti di una rete con matrice di incidenza  $C$  coincidono con i P-invarianti di una rete con matrice di incidenza  $C'$  e viceversa.

22

# Esercizi ed esempi

23

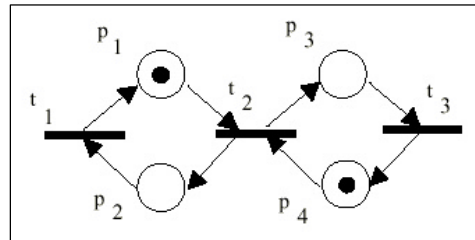
## Esempio 1



La rete (a) è coperta da un unico P-invariante ( $[1 \ 1 \ 1]'$ ). Si noti che qualunque sia la marcatura iniziale della rete, il numero di gettoni si mantiene costante. Anche la rete (b) è coperta dallo stesso P-invariante ( $[1 \ 1 \ 1]'$ ). Tuttavia, tale rete è viva.

24

## Esempio 2

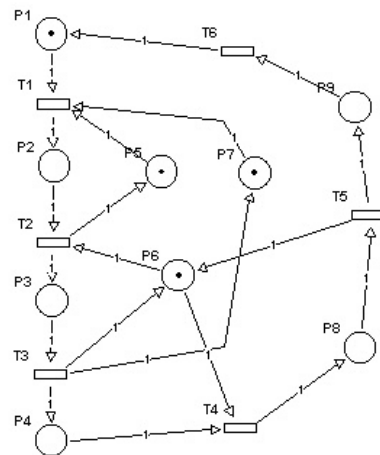


La rete modella due processi distinti che si devono sincronizzare: il primo è individuato dai posti  $p_1$  e  $p_2$ , il secondo dai posti  $p_3$  e  $p_4$ . La sincronizzazione (cioè l'attesa reciproca dei due processi) è rappresentata dalla transizione  $t_2$ . I P-invarianti minimi della rete sono  $[1 \ 1 \ 0 \ 0]'$  e  $[0 \ 0 \ 1 \ 1]'$ .

25

## Esercizio 1

Scrivere la matrice d'incidenza della rete di Petri



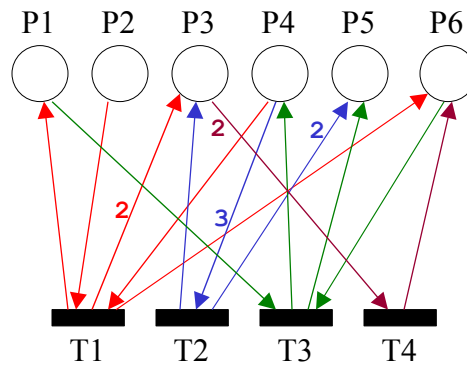
Incidence matrix						
Matr						
	T1	T2	T3	T4	T5	T6
P1	-1	0	0	0	0	1
P2	1	-1	0	0	0	0
P3	0	1	-1	0	0	0
P4	0	0	1	-1	0	0
P5	-1	1	0	0	0	0
P6	0	-1	1	-1	1	0
P7	-1	0	1	0	0	0
P8	0	0	0	1	-1	0
P9	0	0	0	0	1	-1

26

## Esercizio 2

Disegnare la rete di Petri la cui matrice d'incidenza è

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



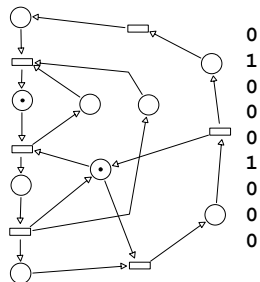
27

## Esercizio 3

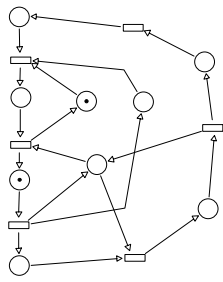
Data la rete di Petri e la marcatura iniziale mostrate, determinare le marcature che la rete raggiunge nei primi tre scatti



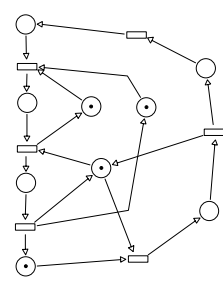
1  
0  
0  
0  
0  
1  
1  
1  
0  
0



0  
1  
0  
0  
0  
0  
1  
1  
0  
0



0  
0  
1  
0  
1  
0  
0  
0  
0  
0

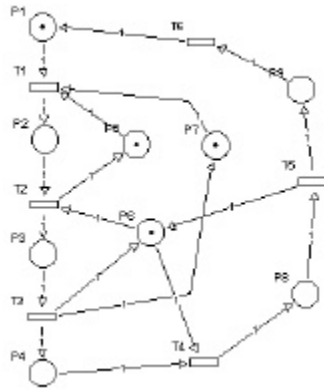


0  
0  
0  
1  
1  
1  
1  
0  
0  
0

28

## Esercizio 4

Data la rete di Petri mostrata, verificare se i vettori  $\mathbf{x}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'$  e  $\mathbf{x}_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]'$  sono o meno P-invarianti della rete stessa



Si può facilmente verificare che

$$\mathbf{x}_1' \mathbf{C}' \mathbf{0}$$

e che

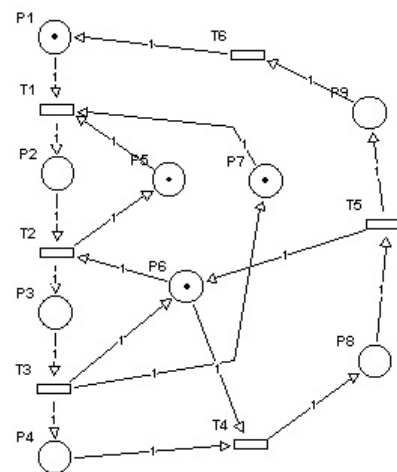
$$\mathbf{x}_2' \mathbf{C}' \mathbf{0}.$$

Quindi  $\mathbf{x}_1$  non è un P-invariante della rete mentre  $\mathbf{x}_2$  lo è.

29

## Esempio 3

Calcolare i P-invarianti ed i T-invarianti della rete di Petri mostrata ed interpretare il risultato ottenuto



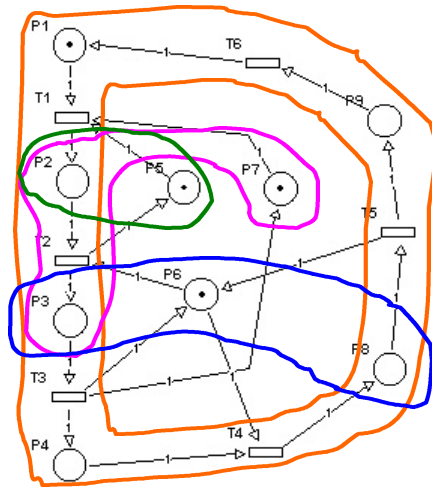
Invarianti calcolo									
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
P1=	0	1	0	0	1	0	0	0	0
P2=	0	1	1	0	0	0	1	0	0
P3=	0	0	1	0	0	1	0	1	0
P4=	1	1	1	1	0	0	0	1	1

Invarianti calcolo							
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	
S1=	1	1	1	1	1	1	

30

### Esempio 3

Intepretazione



In figura sono indicati i supporti dei 4 P-invarianti trovati.

La rete è conservativa.

Una **possibile** interpretazione è la seguente:

Il supporto del P-invariante

**{P1,P2,P3,P4,P8,P9}**

rappresenta le fasi di un ciclo di lavorazione (interpretazione suffragata dal fatto che il T-invariante trovato corrisponde ad una sequenza di scatti ammissibile, **{T1,T2,T3,T4,T5,T6}**, la quale riporta la rete nella marcatura iniziale)

La risorsa la cui disponibilità corrisponde ad una marca in **P7** serve per le due fasi consecutive del ciclo rappresentate da **P2** e **P3** (inizio con **T1**, fine con **T3**).

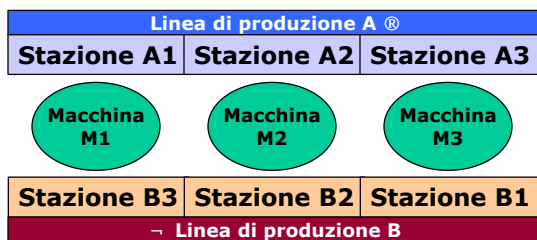
Con analogo significato, la "risorsa **P5**" serve per la "fase **P2**".

La "risorsa **P6**" serve per le fasi "**P3**" e "**P8**", ognuna delle quali al termine la restituisce.

31

### Esempio 4

Due linee di produzione A e B condividono tre macchine M1, M2 e M3. La sequenza di lavorazione è {M1,M2,M3} per i pezzi della linea A, {M3,M2,M1} per i pezzi della linea B. Modellare il sistema con una rete di Petri, trovarne gl'invarianti ed interpretare i risultati ottenuti.

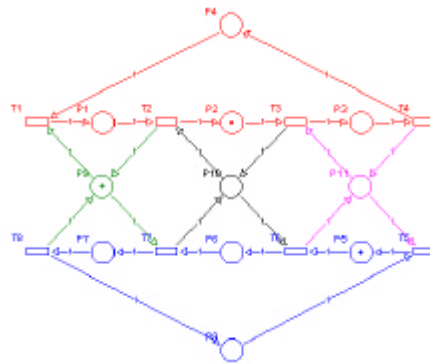


32





## Stato di blocco (deadlock)



Dopo la sequenza di scatti **{T1,T5,T2}** la rete è bloccata nella marcatura mostrata.

Il significato è che la linea **A** aspetta **M3** (posto **P11**) per proseguire liberando **M2** (posto **P10**), ma la linea **B** non libera **M3** perché per farlo attende la disponibilità di **M2**.

**Quindi**

Oltre a P-invarianti e T-invarianti, che informano sulla **conservazione** o meno dei token e sulla **possibilità** di ritornare in un certo stato iniziale, occorrerà individuare altre caratteristiche strutturali di una rete che aiutino a scoprire s'essa può bloccarsi.

**Queste sono i sifoni e le trappole, oggetto della prossima lezione.**