Esercizio 1

Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = (x_1 - x_2)^3 \\ y = \sin(x_1 u) \end{cases}$$

a) calcolare gli stati e le uscite d'equilibrio (reali) in corrispondenza di $u(t) = \bar{u} = 4$;
b) scrivere i sistemi linearizzati nell'intorno di tali equilibri;
c) discutere la stabilità di tali equilibri.

Stati di equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 4 \\ 0 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -4 \\ \bar{x}_2 = -4 \end{cases}$$

(un solo equilibrio)

Uscita di equilibrio: $\bar{y} = \sin(-16) \cong 0.29$

Espressione di f_x, f_u, g_x, g_u:

$$f_x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3(x_1 - x_2)^2 & -3(x_1 - x_2)^2 \end{bmatrix}, \quad f_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_x = [u\cos(x_1 u) \quad 0], \quad g_u = x_1 \cos(x_1 u)$$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta u \\ \delta y = [-3.83 \quad 0]\delta x + 3.83\delta u \end{cases} \quad \textit{dove} \quad \delta x = \begin{bmatrix} x_1 + 4 \\ x_1 + 4 \end{bmatrix}, \quad \delta y = y - 0.29, \quad \delta u = u - 4$$

Stabilità dell'equilibrio:

la matrice dinamica del sistema linearizzato è palesemente singolare, quindi tutto quel che si può dire dalla sua analisi è che l'equilibrio non è asintoticamente stabile.

Esercizio 2

Dato il sistema dinamico LTI SISO la cui equazione di stato è

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

a) dire, motivando la risposta, se è asintoticamente stabile, semplicemente stabile o instabile;
b) calcolare il movimento libero dello stato prodotto dallo stato iniziale $x(0)$ = [2 0]'.

Stabilità:

il polinomio caratteristico della matrice dinamica A è $(s-2)^2-1$, quindi i suoi autovalori sono $s_1=1$ e $s_2=3$; il sistema è quindi instabile.

Movimento libero dello stato:

Autovettori per $s=s_1$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} z = z \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2z_1 + z_2 = z_1 \\ z_1 + 2z_2 = z_2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1 = -z_2 \\ z_2 \, qualsiasi \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Autovettori per $s=s_2$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} z = 3z \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2z_1 + z_2 = 3z_1 \\ z_1 + 2z_2 = 3z_2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_2 \, qualsiasi \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matrice che diagonalizza A e sua inversa: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Calcolo di e^{At}: $e^{At} = M e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} t} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^t + e^{3t}\right) & \frac{1}{2}\left(-e^t + e^{3t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-e^t + e^{3t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^t + e^{3t}\right) \end{bmatrix}$$

Calcolo del movimento:

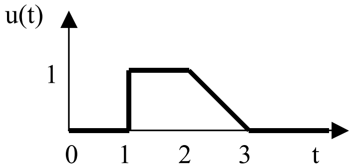
$$x_L(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^t + e^{3t}\right) & \frac{1}{2}\left(-e^t + e^{3t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-e^t + e^{3t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^t + e^{3t}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Calcolare la risposta y(t) del sistema dinamico LTI la cui funzione di trasferimento è

$$G(s)=\frac{2}{s+4}$$

all'ingresso u(t) mostrato qui sotto, a partire da condizioni iniziali nulle.



L'ingresso u(t) si può esprimere come *u(t) = sca(t-1)-ram(t-2)+ram(t-3),*

e quindi la sua trasformata di Laplace è $U(s)=\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s^2}$

Allora $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{2e^{-s}}{s(s+4)}+\frac{2}{s^2(s+4)}\left(e^{-3s}-e^{-2s}\right)$

Sviluppando con Heaviside e antitrasformando si ha

$$\frac{2}{s(s+4)}=\frac{1/2}{s}-\frac{1/2}{s+4}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{2}\left(1-e^{-4t}\right)sca(t)$$

$$\frac{2}{s^2(s+4)}=\frac{-1/8}{s}+\frac{1/2}{s^2}+\frac{1/8}{s+4}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{2}ram(t)+\frac{1}{8}\left(e^{-4t}-1\right)sca(t)$$

e quindi

$$\begin{aligned}y(t)=\;&\frac{1}{2}\left(1-e^{-4(t-1)}\right)sca(t-1)\\&-\frac{1}{2}ram(t-2)-\frac{1}{8}\left(e^{-4(t-2)}-1\right)sca(t-2)\\&+\frac{1}{2}ram(t-3)+\frac{1}{8}\left(e^{-4(t-3)}-1\right)sca(t-3)\end{aligned}$$

Esercizio 4

Dato il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{s+k}{(s+k+2)(s^2-ks+2)},$$

dire per quali valori del parametro k esso è asintoticamente stabile.

Il polinomio a denominatore è fattorizzato in due termini.

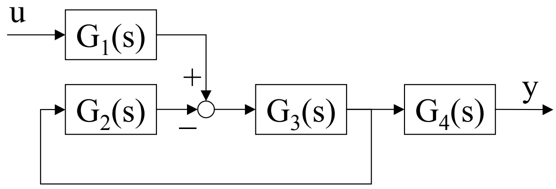
Il primo è s+k+2, la cui radice (reale) è negativa per k>-2.

Il secondo è un polinomio di secondo grado, che ha radici con parte reale negativa se e solo se tutti i suoi coefficienti sono concordi, ovvero per k<0.

Quindi, la stabilità asintotica si ha per –2 < k < 0.

Esercizio 5

Dato il sistema dinamico con ingresso u ed uscita y descritto dallo schema a blocchi



a) esprimere la funzione di trasferimento G(s) = Y(s)/U(s) in funzione di G_1, G_2, G_3, G_4;
b) dire, motivando la risposta, se la stabilità asintotica di qualcuno dei sistemi descritti dalle funzioni di trasferimento G_1, G_2, G_3, e G_4 è necessaria per la stabilità asintotica del sistema complessivo.

La funzione di trasferimento G(s) vale

$$G(s) = G_1(s)\frac{G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}G_4(s)$$

Per la stabilità del sistema complessivo è necessaria quella dei sistemi descritti da $G_1(s)$ e $G_4(s)$, che sono esterni all'anello formato da quelli descritti da $G_2(s)$ e $G_3(s)$.

Domande

1. La risposta all'impulso di un sistema dinamico asintoticamente stabile, per $t \to \infty$,

- ☑ tende a zero.
- ☐ tende ad un valore costante.
- ☐ diverge.

2. La trasformata di Laplace

- ☐ è definita solo per segnali sinusoidali.
- ☑ è un operatore lineare .
- ☐ ha per campo di esistenza il semipiano complesso sinistro.

3. Una funzione di trasferimento non può

- ☐ non avere poli.
- ☐ avere più poli che zeri.
- ☑ avere più zeri che poli.

4. Il tipo della funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{3}{s(s^2+4)}$ è

3	1	0	-1	-4
☐	☑	☐	☐	☐

5. Con riferimento all'esperimento svolto in laboratorio, si dica brevemente quale fatto fisico relativo all'impianto consente di affermare che per descriverne il comportamento è necessario impiegare un modello dinamico.

Si è osservato, ad esempio sulle risposte a scalino, che il valore dell'ingresso (il comando al transistor) in un certo istante non è sufficiente per conoscere il valore dell'uscita (la temperatura della piastrina) in quell'istante. Quindi, per descrivere l'impianto è necessario usare un modello dinamico.

6. Scrivere le istruzioni Matlab che servono a calcolare l'inversa della matrice diagonale 3×3 i cui autovalori sono –2,1 e 4.

A=[-2 0 0; 0 1 0; 0 0 4];
inv(A)

7. Dire qual è il valore di C dopo l'esecuzione delle istruzioni Matlab seguenti.

```
» A=[1 2;3 1];
» B=[1;1];
» C=[1 0]*[A B];
```

C = [1 2 1]