Esercizio 1

Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \\ y = x_1(x_1 + x_2)u \end{cases}$$

a) calcolare gli stati e le uscite d'equilibrio (reali) in corrispondenza di **u(t) = ū = -1**.
b) scrivere i sistemi linearizzati nell'intorno di tali equilibri.
c) discutere la stabilità di tali equilibri.

a) *Gli stati d'equilibrio soddisfano il sistema d'equazioni*

$$\begin{cases} \bar{x}_1^2 - 1 = 0 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $\bar{x}_1 = \mp 1$

Sostituendo, la seconda equazione diviene $\bar{x}_2^2 = \mp 1$

Quest'equazione ha soluzioni reali soltanto per $\bar{x}_1 = 1$*, e tali soluzioni valgono* $\bar{x}_{2a} = -1$ *e* $\bar{x}_{2b} = 1$

Pertanto, vi sono i due stati di equilibrio $\bar{x}_a = [1 \quad -1]'$ *e* $\bar{x}_b = [1 \quad 1]'$

Corrispondentemente, le uscite d'equilibrio sono $\bar{y}_a = 0$ *e* $\bar{y}_b = -2$

b) *Dette A, b, c, d le matrici dei sistemi linearizzati nell'intorno rei punti di equilibrio, esse si esprimono in generale come*

$$A = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 0 \\ 1 & -2\bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [2\bar{x}_1\bar{u} + \bar{x}_2\bar{u} \quad \bar{x}_1\bar{u}], \; d = \bar{x}_1(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

Pertanto, i sistemi linearizzati S_a e S_b corrispondenti ai due equilibri trovati sono

$$S_a: \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \delta x_1 = x_1 - 1 \\ \delta x_2 = x_2 + 1 \\ \delta y = y \\ \delta u = u + 1 \end{array}$$

$$S_b: \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = [-3 \quad -1] \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + 2\delta u \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \delta x_1 = x_1 - 1 \\ \delta x_2 = x_2 - 1 \\ \delta y = y + 2 \\ \delta u = u + 1 \end{array}$$

c) *In ambedue i casi la matrice A (che è triangolare) ha almeno un autovalore positivo*
Quindi, ambedue gli equilibri sono instabili

Esercizio 2

Calcolare la risposta y(t) del sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+5)}$$

all'ingresso **u(t) = sca(t-4)**, a partire da condizioni iniziali nulle.

Risulta immediatamente

$$U(s) = \frac{e^{-4s}}{s}$$

Quindi

$$Y(s) = e^{-4s}\,\frac{s+1}{s(s+2)(s+5)}$$

Per antitrasformare, si ponga

$$\frac{s+1}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

da cui, eguagliando i numeratori, si ricava A=1/10, B=1/6, C=-4/15

Si ha così

$$Y(s) = \frac{1/10}{s} + \frac{1/6}{s+2} - \frac{4/15}{s+5}$$

e quindi

$$y(t) = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6}e^{-2(t-4)} - \frac{4}{15}e^{-5(t-4)}\right) sca(t-4)$$

Esercizio 3

Dato il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-2a}{(a+s-5)(s^3+s^2+2as+a)},$$

dire per quali valori del parametro ***a*** esso è asintoticamente stabile.

Il denominatore è composto da due fattori, il primo dei quali ha la sola radice (reale) s=5-a
Pertanto, dovendo questa radice essere negativa, una prima condizione è a>5

Il secondo fattore deve poi avere tutti i coefficienti non nulli e concordi in segno, quindi dev'essere anzitutto a>0

Si può infine applicare il criterio di Routh a questo solo secondo fattore, ottenendo la tabella

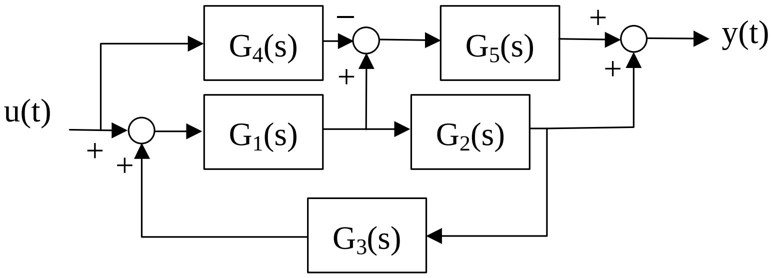
$$\begin{array}{ll}
1 & 2a \\
1 & a \\
-\frac{1}{1}\det\begin{bmatrix}1 & 2a \\ 1 & a\end{bmatrix} = a & \\
-\frac{1}{a}\det\begin{bmatrix}1 & a \\ a & 0\end{bmatrix} = a &
\end{array}$$

che si riconduce, imponendo la positività deli termini della prima colonna, alla condizione a>0

Pertanto,il sistema è asintoticamente stabile per a>5

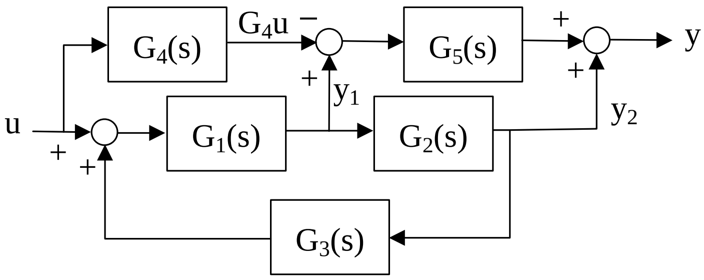
Esercizio 4

Dato il sistema dinamico descritto dallo schema a blocchi



a) esprimere la funzione di trasferimento **G(s) = Y(s)/U(s)** in funzione di G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5.
b) dire, motivando la risposta, se la stabilità asintotica di qualcuno dei sistemi descritti dalle funzioni di trasferimento G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5 è **necessaria** per la stabilità asintotica del sistema complessivo.

a) *Per comodità è possibile scrivere*



da cui risulta subito

$$Y_1 = \frac{G_1}{1-G_1G_2G_3}U, \quad Y_2 = \frac{G_1G_2}{1-G_1G_2G_3}U$$

Allora

$$Y = G_5(Y_1 - G_4U) + Y_2 = G_5\left(\frac{G_1}{1-G_1G_2G_3}U - G_4U\right) + \frac{G_1G_2}{1-G_1G_2G_3}U$$

e quindi

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{G_1G_5 - G_4G_5(1-G_1G_2G_3) + G_1G_2}{1-G_1G_2G_3}$$

b) *Per la stabilità asintotica del sistema complessivo è necessaria quella dei sistemi descritti da G_4 e G_5, che non fanno parte dell'anello*

Domande

1. La risposta allo scalino di un sistema dinamico instabile, per t→∞,

- ☐ tende a zero
- ☑ non ha limite finito
- ☐ diverge oscillando

2. Il movimento libero dell'uscita di un sistema dinamico asintoticamente stabile

- ☑ tende a zero per t→∞
- ☐ è sempre identicamente nullo
- ☐ non dipende dallo stato iniziale

3. Per "rappresentazione ingresso-uscita" di un sistema dinamico LTI s'intende

- ☐ il numero d'ingressi e uscite
- ☐ la trasformazione d'uscita
- ☑ la funzione di trasferimento

4. Un sistema dinamico LTI a dimensione finita non può

- ☑ contenere ritardi
- ☐ avere autovalori immaginari
- ☐ avere guadagno statico infinito

5. La trasformata di Laplace della risposta allo scalino di un sistema dinamico LTI a dimensione finita è sempre

- ☐ minore di 1
- ☑ razionale fratta
- ☐ reale

6. Perché il sistema descritto da uno schema a blocchi generico sia asintoticamente stabile, la stabilità asintotica di tutti i blocchi componenti lo schema

- ☐ è necessaria
- ☐ è sufficiente
- ☑ non è né necessaria né sufficiente

7. Il tipo della funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{1}{s^2-5}$ è

2	1	0	-5	-1/5
☐	☐	☑	☐	☐

8. Il guadagno della funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{10(s+2)}{s^3+4s-5}$ è

10	3	2	-4	-5
☐	☐	☐	☑	☐

9. Dare, *il più sinteticamente possibile*, la definizione di stato di equilibrio di un sistema dinamico tempo-invariante a fronte d'ingressi costanti.

Scritta l'equazione di stato del sistema dinamico nella forma

$$\dot{x}(t)=f\left(x(t),u(t)\right)$$

dove x è il vettore di stato, e detto $\overline{u}$ il valore costante dell'ingresso (scalare o vettore), gli stati di equilibrio sono le soluzioni $\overline{x}$ dell'equazione

$$f\left(\overline{x},\overline{u}\right)=0$$