Esercizio 1

Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + 2u \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 - x_2 - u \\ y = x_1 + x_2 u^2 \end{cases}$$

a) calcolare lo stato e l'uscita d'equilibrio in corrispondenza di $\mathbf{u(t) = \bar{u} = 4}$.
b) calcolare le matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ del sistema linearizzato nell'intorno di tale equilibrio.

Lo stato d'equilibrio s'ottiene risolvendo rispetto a $\bar{x}$ il sistema d'equazioni $f(\bar{x},\bar{u})=0$, essendo $\dot{x}=f(x,u)$ l'equazione di stato del sistema dinamico non lineare in oggetto; nel caso in esame, detto $\bar{x} = [\bar{x}_1\ \bar{x}_2]'$ lo stato d'equilibrio cercato, occorre dunque risolvere rispetto a $\bar{x}_1$ ed $\bar{x}_2$ il sistema d'equazioni

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1^3 + 2\bar{u} \\ 0 = 3\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 - \bar{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \bar{x}_1^3 + 8 \\ 0 = 3\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 - 4 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione data da $\bar{x}_1 = -2$ e $\bar{x}_2 = 8$. C'è dunque questo solo stato d'equilibrio, cui corrisponde l'uscita d'equilibrio

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2\bar{u}^2 = -2 + 8 \cdot 4^2 = 126$$

Per ottenere il sistema linearizzato occorre calcolare le quattro espressioni

$$f_x = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 6x_1 & -1 \end{bmatrix}, \quad f_u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g_x = \begin{bmatrix} 1 & u^2 \end{bmatrix}, \quad g_u = 2x_2 u$$

col che, esprimendo il sistema linearizzato nella forma

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = A\delta x + b\delta u \\ \delta y = c\delta x + d\delta u \end{cases}$$

dove $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta y = y - \bar{y}$ e $\delta u = u - \bar{u}$, s'ottiene

$$A = f_x\big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 3\bar{x}_1^2 & 0 \\ 6\bar{x}_1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 0 \\ 6 \cdot (-2) & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = f_u\big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c = g_x\big|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16 \end{bmatrix}, \quad d = g_u\big|_{\bar{x},\bar{u}} = 2\bar{x}_2\bar{u} = 2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$$

Risultato:

$\bar{x} =$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$	**A =**	$\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}$	**b =**	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
$\bar{y} =$	126	**c =**	$\begin{bmatrix} 1 & 16 \end{bmatrix}$	**d =**	64
dove **dx =**	$\begin{bmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 8 \end{bmatrix}$	**dy =**	$y - 126$	**du =**	$u - 4$

Esercizio 2

Calcolare la risposta del sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

all'ingresso $\mathbf{u(t) = e^{-t}}$, a partire da condizioni iniziali nulle.

La trasformata di Laplace dell'ingresso u(t) è

$$U(s)=\frac{1}{s+1}$$

Detta y(t) la risposta da calcolarsi, la sua trasformata di Laplace è allora

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Per antitrasformare quest'espressione si può procedere esprimendo Y(s) come somma di fratti semplici, ovvero determinando tre costanti A, B e C tali che

$$\frac{3}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s+3)}$$

Questo può farsi eguagliando i polinomi a numeratore, ovvero ponendo

$$3=A(s+2)(s+3)+B(s+1)(s+3)+C(s+1)(s+2)$$

Valutando poi tale espressione nei poli di Y(s), ovvero in $s=-1$, $s=-2$ e $s=-3$, si perviene al sistema

$$\begin{cases}A(-1+2)(-1+3)=3\\ B(-2+1)(-2+3)=3\\ C(-3+1)(-3+2)=3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2A=3\\ -B=3\\ 2C=3\end{cases}$$

che produce A = 3/2, B = −3 e C = 3/2. La risposta cercata y(t) è allora

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3/2}{(s+1)}-\frac{3}{(s+2)}+\frac{3/2}{(s+3)}\right]=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\right)sca(t)$$

Risultato:

y(t) = $\left(\frac{3}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\right)sca(t)$

Esercizio 3

Dato il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k(1-s)}{(1+s)(s^3+3s^2+ks+1)} \, ,$$

dire per quali valori del parametro **k** esso è asintoticamente stabile.

La stabilità asintotica del sistema vi è se e soltanto se tutti i poli di G(s) giacciono nel semipiano complesso sinistro aperto, ovvero se hanno parte reale strettamente negativa.
Uno di tali poli è evidentemente $s=-1$, che rispetta tale condizione. Gli altri sono le radici dell'equazione di terzo grado in s

$$s^3+3s^2+ks+1=0$$

per cui conviene determinare il segno della loro parte reale usando la tabella di Routh.
Questa risulta essere

$$\begin{array}{cc}
1 & k \\
3 & 1 \\
-\frac{1}{3}\det\begin{bmatrix} 1 & k \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3k-1}{3} & 0 \\
-\frac{3}{3k-1}\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \frac{3k-1}{3} & 0 \end{bmatrix} = 1 & 0
\end{array}$$

I termini costanti sulla prima colonna sono tutti positivi, e pertanto vi è stabilità asintotica se e soltanto se è positivo anche il solo termine dipendente da k. Questo conduce all'equazione

$$3k-1>0$$

e dunque alla condizione

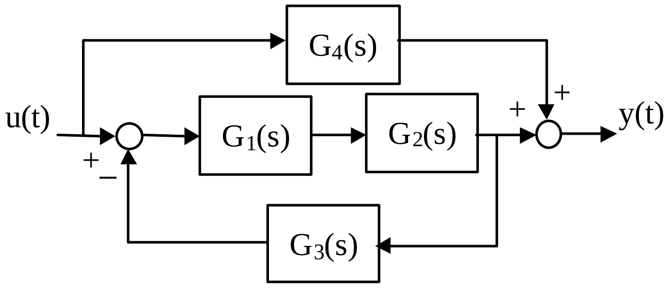
$$k>1/3$$

Risultato:

Stabilità asintotica per $k>1/3$

Esercizio 4

Dato il sistema dinamico descritto dallo schema a blocchi



dove

$$G_1(s) = \frac{2}{s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_3(s) = 2, \quad G_4(s) = \frac{3}{s+4},$$

calcolare la funzione di trasferimento **G(s) = Y(s)/U(s)**. Si consiglia, per chiarezza, di esprimere per prima cosa G in funzione di G_1, G_2, G_3 e G_4 e *poi* di sostituirvi le espressioni di queste ultime.

La funzione di trasferimento da u ad y è data dal parallelo di G_4 e di un sistema retroazionato negativamente, avente G_1G_2 per funzione di trasferimento in linea d'andata e $G_1G_2G_3$ per funzione di trasferimento d'anello. Quindi,

$$G(s) = G_4(s) + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

Sostituendo in G(s) le espressioni date per G_1, G_2, G_3 e G_4 si ha poi

$$G(s) = \frac{3}{s+4} + \frac{\frac{2}{s(s+1)}}{1+\frac{4}{s(s+1)}} = \frac{3}{s+4} + \frac{2}{s(s+1)+4} = \frac{3(s^2+s+4)+2(s+4)}{(s+4)(s^2+s+4)} = \frac{3s^2+5s+20}{(s+4)(s^2+s+4)}$$

Risultato:

G(s) = $\dfrac{3s^2+5s+20}{(s+4)(s^2+s+4)}$

Domande

1. Un sistema dinamico lineare è instabile se

- [x] ha almeno un autovalore con parte reale positiva
- [ ] ha un autovalore nullo
- [ ] non ha autovalori

2. Il movimento libero dello stato in un sistema asintoticamente stabile tende

- [ ] all'infinito
- [x] a zero
- [ ] a tornare allo stato iniziale

3. La risposta all'impulso di un sistema asintoticamente stabile tende

- [x] a zero
- [ ] all'infinito
- [ ] ad un valore costante

4. Una funzione di trasferimento non può avere

- [x] più zeri che poli
- [ ] più poli che zeri
- [ ] tanti zeri quanti poli

5. Il guadagno della funzione di trasferimento $G(s)=\frac{2}{s-2}$ è

2	1	-1	-2	1/2
☐	☐	☑	☐	☐

6. La risposta a scalino unitario del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)=\frac{1}{s+4}$ tende, per $t\to\infty$, al valore

0	∞	1	0.25	4
☐	☐	☐	☑	☐

7. Dare, *il più sinteticamente possibile*, la definizione di sistema dinamico lineare

Un sistema con ingresso u ed uscita y, scalari o vettori reali, si dice "dinamico" se per determinare l'andamento di y in un assegnato intervallo di tempo non è sufficiente la conoscenza dell'andamento di u nello stesso intervallo ma occorre anche quella del valore assunto all'istante iniziale dell'intervallo da una variabile x, scalare o vettore reale, detta "stato" del sistema.
Un sistema dinamico si dice "lineare" se rappresentandolo nella forma

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(x(t),u(t),t)\\ y(t)=g(x(t),u(t),t)\end{cases}$$

le funzioni f(·,·,·) e g(·,·,·) risultano essere lineari in x e in u.