Esercizio 1

Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - u \\ y = (x_1 + x_2)u \end{cases}$$

a) calcolare gli stati e le uscite d'equilibrio in corrispondenza di u(t) = $\bar{u}$ = 9.
b) discutere la stabilità di tali equilibri.

a) Gli stati d'equilibrio s'ottengono dal sistema

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 \\ 0 = \bar{x}_1^2 - 9 \end{cases} ,$$

le cui sole soluzioni reali (quelle complesse o immaginarie pure non hanno significato come stati d'equilibrio) sono

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} -3 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}',\ \bar{x}_b = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}'.$$

Corrispondentemente, si hanno le uscite d'equilibrio

$$\bar{y}_a = 9\left(-3 - \sqrt{3}\right),\ \bar{y}_b = 9\left(-3 + \sqrt{3}\right).$$

b) Per discutere la stabilità d'ognuno dei due equilibri occorre determinare il segno della parte reale degli autovalori della matrice dinamica del sistema linearizzato corrispondente. Essendo tale matrice data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\bar{x}_2 \\ 2\bar{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ne risulta che, in corrispondenza dei due stati d'equilibrio, i polinomi caratteristici sono

$$p_a(s) = \det\begin{bmatrix} s-1 & -2\sqrt{3} \\ -6 & s \end{bmatrix} = s^2 - s - 12\sqrt{3}$$

$$p_b(s) = \det\begin{bmatrix} s-1 & 2\sqrt{3} \\ -6 & s \end{bmatrix} = s^2 - s + 12\sqrt{3} \quad .$$

Ambedue questi polinomi hanno almeno una variazione nel segno dei coefficienti, ovvero almeno una radice con parte reale positiva. Pertanto, ambedue gli equilibri sono instabili.

Risultato:

Stati d'equilibrio: [-3 -$\sqrt{3}$]', [-3 $\sqrt{3}$]'

Uscite d'equilibrio: 9(-3-$\sqrt{3}$), 9(-3+$\sqrt{3}$)

Stabilità: ambedue gli equilibri sono instabili

Esercizio 2

Calcolare la risposta y(t) all'impulso unitario del sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{2}{s^2+5s+4}\,.$$

La trasformata di Laplace dell'impulso unitario è 1, pertanto quella della trasformata Y(s) della risposta y(t) da calcolarsi è, fattorizzando il denominatore,

$$Y(s)=\frac{2}{(s+1)(s+4)}\,.$$

Per antitrasformare quest'espressione si può procedere esprimendo Y(s) come somma di fratti semplici, ovvero determinando due costanti A e B tali che

$$\frac{2}{(s+1)(s+4)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+4)}\,.$$

Questo può farsi eguagliando i polinomi a numeratore, ovvero ponendo

$$2=A(s+4)+B(s+1)\,;$$

valutando poi tale espressione nei poli di Y(s), ovvero in s = –1 e s = –4, si perviene al sistema

$$\begin{cases}A(-1+4)=2\\B(-4+1)=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}3A=2\\-3B=2\end{cases}$$

che produce A = 2/3 e B = –2/3. La risposta cercata y(t) è allora

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2/3}{(s+1)}-\frac{2/3}{(s+4)}\right]=\frac{2}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)sca(t)$$

Risultato:

$\mathbf{y(t)=\frac{2}{3}(e^{-t}\text{-}e^{-4t})sca(t)}$

Esercizio 3

Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (\alpha - 2)x_2 + 4x_3 + \alpha^2 u \\ \dot{x}_3 = (3-\alpha)x_3 + u \\ y = x_1 + \alpha(x_2 + x_3) \end{cases}$$

dire per quali valori del parametro α esso è asintoticamente stabile.

La matrice dinamica del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\alpha \end{bmatrix}$$

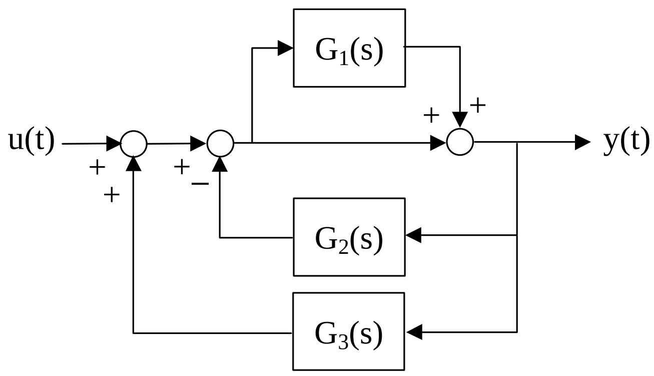
e quindi i suoi autovalori sono α, $\alpha-2$ e $3-\alpha$. Perché vi sia stabilità asintotica essi devono essere tutti negativi, condizione che non può essere verificata per nessun valore di α.

Risultato:

Stabilità asintotica per nessun valore di a**.**

Esercizio 4

Dato il sistema dinamico descritto dallo schema a blocchi



dove

$$G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = 4, \quad G_3(s) = \frac{1}{1+s},$$

a) calcolare la funzione di trasferimento G(s) = Y(s)/U(s);
b) dire se nel sistema vi sono cancellazioni e, in caso affermativo, se queste sono critiche.

a) Per esprimere G(s) conviene procedere in due passi:

1. $$H(s) = \frac{1+G_1(s)}{1+G_2(s)\left(1+G_1(s)\right)} = \frac{1+1/s}{1+4(1+1/s)} = \cdots = \frac{s+1}{5s+4}$$

2. $$G(s) = \frac{H(s)}{1-G_3(s)H(s)} = \frac{\frac{s+1}{5s+4}}{1-\frac{1}{1+s}\frac{s+1}{5s+4}} = \cdots = \frac{s+1}{5s+3}$$

b) Poiché l'ordine di G(s) è 1 mentre la somma di quelli dei sistemi componenti è 2, certamente vi è una cancellazione. Dai calcoli eseguiti si vede che questa avviene tra H(s) e $G_3(s)$, e ovviamente non è critica essendo nel semipiano sinistro.

Risultato:

G(s) = $\frac{s+1}{5s+3}$

Eventuali cancellazioni: una in s = -1, quindi non critica

Domande

1. La risposta allo scalino di un sistema asintoticamente stabile tende

- ☐ a zero
- ☑ ad un valore costante
- ☐ all'infinito

2. Il limite per t→∞ del movimento libero dello stato in un sistema instabile

- ☐ è infinito.
- ☐ non si può mai calcolare.
- ☑ non sempre esiste e comunque non esiste mai finito.

3. La rappresentazione di un sistema dinamico in variabili di stato e la sua funzione di trasferimento, dal punto di vista dell'analisi di stabilità,

- ☐ sono del tutto equivalenti.
- ☐ sono equivalenti se e solo se nel sistema non vi sono cancellazioni.
- ☑ sono equivalenti se e solo se nel sistema non vi sono cancellazioni critiche.

4. Se l'uscita di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile tende (per t→∞) a zero per qualunque valore costante applicato all'ingresso, certamente la funzione di trasferimento di quel sistema presenta almeno

- ☐ un polo nell'origine.
- ☑ uno zero nell'origine.
- ☐ una coppia di poli complessi coniugati.

5. La risposta a scalino unitario del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$ è

- ☐ divergente.
- ☐ monotona crescente.
- ☑ oscillante.

6. Il tipo della funzione di trasferimento $G(s)=\frac{s+3}{s^4-3s}$ è

-1	0	1	3	4
☐	☐	☑	☐	☐