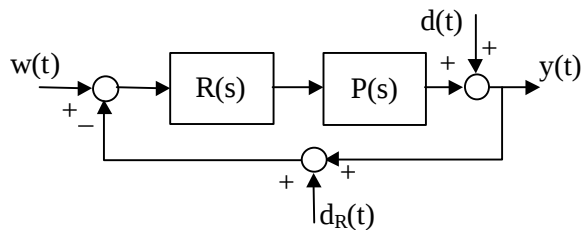


Esercizio 1

Dato il sistema di controllo



dove

$$P(s) = \frac{10}{1+0.2s}$$

$$w(t) = \text{sca}(t)$$

$$d(t) = 5\sin(\omega_1 t), \omega_1 \leq 0.04$$

$$d_R(t) = \sin(\omega_2 t), \omega_2 \geq 40$$

determinare $R(s)$ in modo che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e che

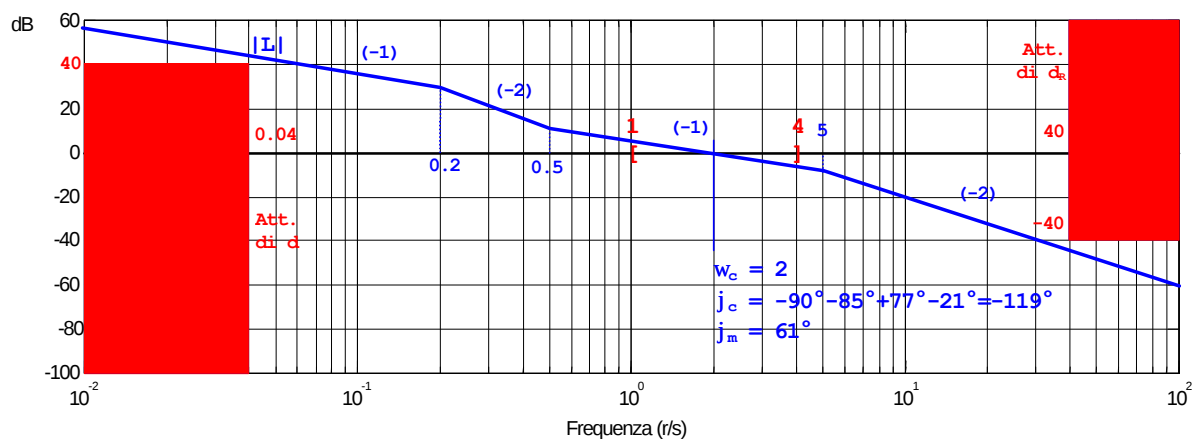
- l'errore a transitorio esaurito e_∞ prodotto da $w(t)$ sia nullo;
- la pulsazione critica ω_c sia compresa tra 1 e 4 r/s;
- il margine di fase ϕ_m sia di almeno 50° ;
- i disturbi d e d_R compaiano sull'uscita y attenuati di almeno 100 volte.

Il progetto statico richiede un regolatore di tipo 1. Infatti,

$$|e_\infty| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{E(s)}{W(s)} \right) \right| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^{g_R}}{s^{g_R} + 10\mu_R} \frac{1}{s} \right) \right| = 0 \text{ con } g_R = 1, \forall \mu_R$$

I vincoli sul diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento d'anello $L=RP$ sono indicati in figura, assieme ad una possibile soluzione data da

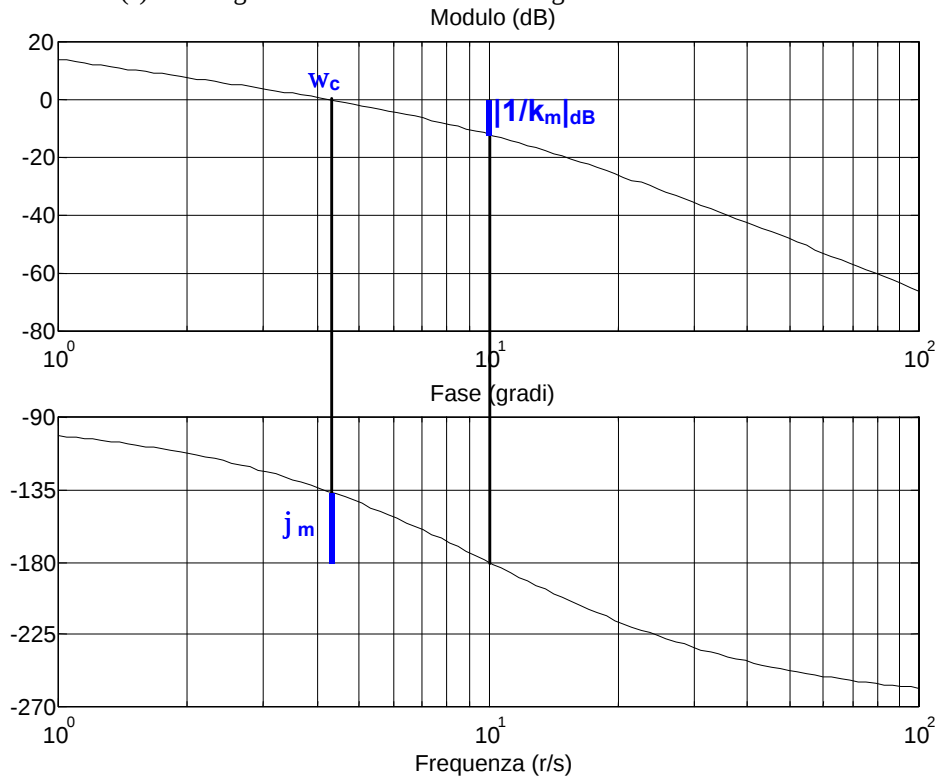
$$L(s) = \frac{6(1+s/0.5)}{s(1+s/0.2)(1+s/5)} \Rightarrow R(s) = \frac{0.6(1+s/0.5)}{s(1+s/0.2)}$$

**Risultato:**

$$R(s) = \frac{0.6(1+s/0.5)}{s(1+s/0.2)}$$

Esercizio 2

Dato il sistema di controllo a tempo continuo con retroazione negativa unitaria in cui la funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ ha i diagrammi di Bode mostrati in figura



- valutare ed indicare sul grafico il margine di fase ϕ_m ed il margine di guadagno k_m ;
- dire, motivando la risposta, quanto vale in modulo l'errore a transitorio esaurito e_∞ prodotto da una variazione a scalino unitario del segnale di riferimento;
- indicare, motivando la scelta, un valore "ragionevole" del tempo di campionamento T_s da usarsi per una eventuale realizzazione digitale del regolatore presente nell'anello.

- Dal grafico risulta $\phi_m \cong 45^\circ$ (con $\omega_c \cong 4.2$ rad/sec) e $k_m \cong 12$ dB.
- L'andamento dei diagrammi di Bode del modulo e della fase conduce a dire che $L(s)$ è di tipo 1, pertanto $|e_\infty|$ è nullo.
- Una scelta "ragionevole" consiste nel porre la pulsazione di campionamento ω_s pari, ad esempio, a 50 volte ω_c . Quindi

$$\frac{2\pi}{T_s} = 50 \cdot 4.2 \Rightarrow T_s = \frac{2\pi}{50 \cdot 4.2} \cong 0.03 \text{ sec.}$$

Risultato:

$$j_m = 45^\circ$$

$$k_m = 12 \text{ dB}$$

$$|e_v| = 0$$

$$T_s = 0.03 \text{ sec}$$

Esercizio 3

Dato il sistema dinamico LTI a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(1+4s)(1+s)}$$

- calcolare la funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a tempo discreto approssimante $G(s)$ che si ottiene con il metodo di Eulero esplicito e con tempo di campionamento pari a 0.1s;
- calcolare i primi 4 campioni della risposta di $G^*(z)$ all'impulso (discreto) unitario.

a) Applicando il metodo di Eulero esplicito s'ottiene

$$G^*(z) = G\left(\frac{z-1}{T_s}\right) = \frac{1}{\left(1+4\frac{z-1}{0.1}\right)\left(1+\frac{z-1}{0.1}\right)} = \dots = \frac{1}{400z^2 - 750z + 351}.$$

b) Detti rispettivamente $u(k)$, $y(k)$ l'ingresso e l'uscita del sistema a tempo discreto descritto da $G^*(z)$ e $U(z)$, $Y(z)$ le loro trasformate Zeta, si ha

$$(400z^2 - 750z + 351)Y(z) = U(z)$$

e, antitrasformando,

$$400y(k+2) - 750y(k+1) + 351y(k) = u(k) \Rightarrow y(k+1) = \frac{750}{400}y(k) - \frac{351}{400}y(k-1) + \frac{1}{400}u(k-1).$$

Quindi, poiché l'impulso discreto unitario ha espressione

$$\text{imp}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

ne risulta

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{750y(-1) - 351y(-2) + u(-2)}{400} = \frac{750 \cdot 0 - 351 \cdot 0 + 0}{400} = 0 \\ y(1) &= \frac{750y(0) - 351y(-1) + u(-1)}{400} = \frac{750 \cdot 0 - 351 \cdot 0 + 0}{400} = 0 \\ y(2) &= \frac{750y(1) - 351y(0) + u(0)}{400} = \frac{750 \cdot 0 - 351 \cdot 0 + 1}{400} = 0.0025 \\ y(3) &= \frac{750y(2) - 351y(1) + u(1)}{400} = \frac{750 \cdot 0.0025 - 351 \cdot 0 + 0}{400} = 0.0046875 \end{aligned}$$

Risultato:

$$G^*(z) = \frac{1}{400z^2 - 750z + 351}$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = 0.0025$$

$$y(3) = 0.0046875$$

Esercizio 4

Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.05 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{cases},$$

- a) dire se è asintoticamente stabile, semplicemente stabile oppure instabile;
 b) calcolarne la funzione di trasferimento $G^*(z)$.

a) Per discutere la stabilità del sistema occorre calcolare gli autovalori della matrice dinamica:

$$\det \begin{bmatrix} z-0.6 & 0.05 \\ -1 & z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z^2 - 0.6z + 0.05 = 0 \Rightarrow z_1 = 0.5, z_2 = 0.1;$$

avendo ambedue gli autovalori modulo strettamente minore di 1, ne consegue che il sistema è asintoticamente stabile.

b) La funzione di trasferimento del sistema è

$$G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-0.6 & 0.05 \\ -1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots = \frac{2}{z^2 - 0.6z + 0.05}.$$

Risultato:

Il sistema è ☒ asintoticamente stabile ☐ semplicemente stabile ☐ instabile

$$G^*(z) = \frac{2}{z^2 - 0.6z + 0.05}$$

Domande

1. La stabilità di un sistema di controllo in retroazione può essere giudicata col criterio di Bode a patto che la funzione di trasferimento d'anello $L(s)$
 - ☒ non abbia poli con parte reale positiva.
 - ☐ sia razionale fratta.
 - ☐ sia strettamente propria, ovvero abbia più poli che zeri.
2. Detta ω_1 la (sola) pulsazione ove il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ di un sistema di controllo in retroazione interseca l'asse 0 dB, la quantità $\arg(L(j\omega_1))$ si chiama
 - ☐ margine di fase.
 - ☒ fase critica.
 - ☐ pulsazione d'angolo.
3. In un sistema di controllo in retroazione, se in cascata al processo s'inserisce un ritardo puro, la pulsazione critica
 - ☐ diminuisce.
 - ☒ non cambia.
 - ☐ aumenta.
4. Nello schema a blocchi di un sistema di controllo contenente un regolatore digitale, l'elemento interposto tra questo e l'attuatore si dice
 - ☐ campionatore.
 - ☐ trasmettitore.
 - ☒ mantenitore.
5. Quando si realizza con tecnologia digitale un regolatore lineare progettato a tempo continuo, il margine di fase, rispetto a quello calcolato a tempo continuo,
 - ☐ è lo stesso.
 - ☒ è minore.
 - ☐ è maggiore.
6. In un regolatore PID, l'azione integrale ha essenzialmente il ruolo di garantire che
 - ☒ l'errore a regime sia nullo.
 - ☐ vi sia completa reiezione dei disturbi sulla linea d'andata.
 - ☐ il margine di fase sia il massimo possibile.